9.3.11 Zugfestigkeit von Wasser

******

1 Motivation

Wasser, das frei von Dampfbläschen ist, kann Zugspannungen aushalten, die 10 MPa weit übersteigen können. Damit lassen sich vertikale Wassersäulen von über 1 km Länge in einem unten offenen Rohr aufhängen. Die Wasserversorgung von Blättern von über 100 m hohen Bäumen beruht auf der Zugfestigkeit von Wasser.

Die *effektive* Zugfestigkeit kann jedoch durch sich ausdehnende Dampfblasen im Wasser zerstört werden. Dampfdruck und Zugkraft vergrössern die Blasen, die Oberflächenspannung verkleinert sie.

Die durch die Energieabgabe von Höhenstrahlung in Wasser entstehenden kleinen Dampfblasen begrenzen das Höhenwachstum von Bäumen auf der Erde auf ca. 130 m.

2 Experiment

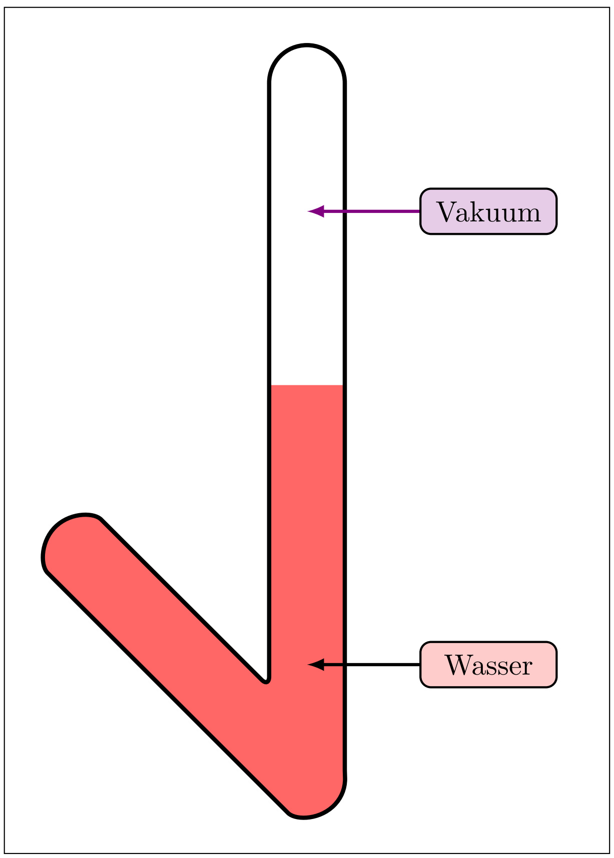

Abbildung 1: Glassgefäss zur Demonstration der Zugfestigkeit von Wasser (nach Prof. Beat Hahn/Universität Bern).

Ein evakuiertes Glasgefäss ist teilweise mit gefärbtem Wasser gefüllt (siehe Abb. 1). Beim Drehen des Gefässes um 180° fällt das Wasser auf den Glasboden. Dies ist wegen des fehlenden Luft-

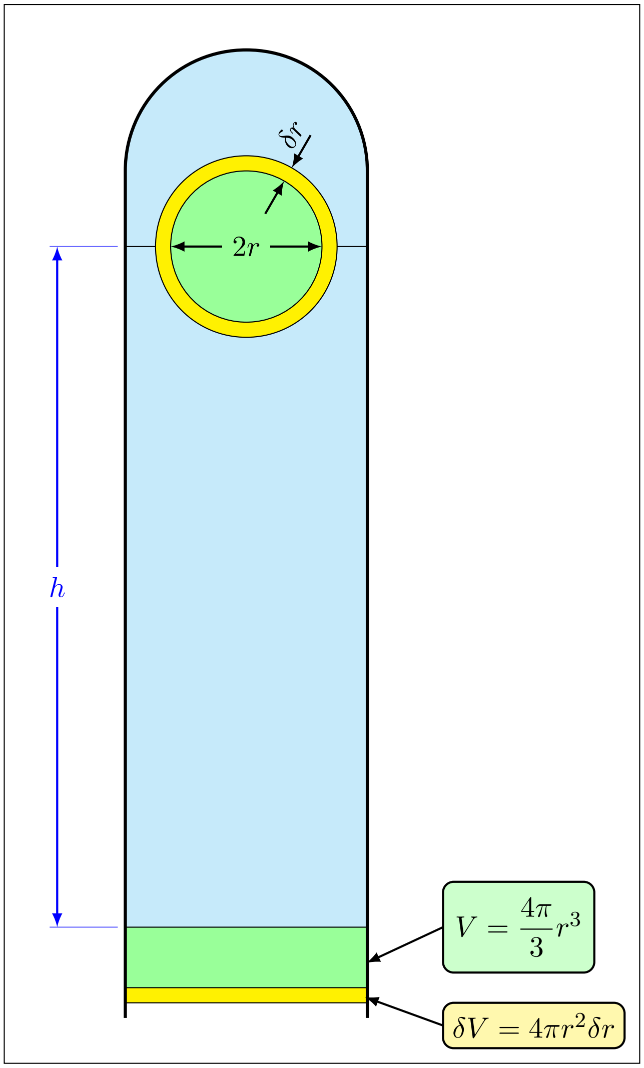

Abbildung 2: Zur Ermittlung der Gleichgewichtsbedingung einer Dampfblase in Wasser.

polsters deutlich hörbar; es klingt, als ob Metall auf Glas fallen würde.

Anschliessend klopft man mit einem Holzstäbchen die stets vorhandenen Gas- und Dampfbläschen aus dem Wasser heraus. Beim erneuten Umdrehen bleibt das Wasser im Glasgefäss stehen!

Dies ist ein grossartiges Experiment, das die Studenten an Zaubertricks denken lässt!

3 Theorie

Wie bereits erwähnt, kann die *effektive* Zugfestigkeit durch sich ausdehnende Dampfblasen im Wasser zerstört werden. Dampfdruck und Zugkraft der unterhalb stehenden Wassersäule vergrössern die Blasen, die Oberflächenspannung verkleinert sie. Wir berücksichtigen, dass der Radius einer Gasblase so klein ist, dass sie sich nicht wegen der Stokeschen Reibung nach oben bewegt, und verwenden das Prinzip der virtuellen Verrückungen (aus der Gleichgewichtslage).

Die Oberfläche der kugelförmigen Gasblase mit Radius r ist (siehe Abb. 2):

$$A = 4\pi r^2 \tag{1}$$

Bei einer Radiusänderung um δr ändert sich die Oberfläche um

$$\delta A = 8\pi r\,\delta r \tag{2}$$

Dabei leistet der Dampfdruck p_{D} die Arbeit

$$\delta W_{\mathrm{D}} = 4\pi r^2\, p_{\mathrm{D}}\,\delta r \tag{3}$$

Die Vergrösserung der Dampfkugel bewirkt auch eine Verdrängung δm des Wassers aus der neu dazugekommenen Kugelschale:

$$\delta m = 4\pi r^2\,\delta r\,\rho_{\mathrm{H_2O}} \tag{4}$$

Da das Wasser in einer nach unten offenen Säule hängt, kann es nur nach *unten* verdrängt werden, und zwar genau um die Höhe h, auf der sich die Dampfblase befindet. Die dabei gewonnene Arbeit δW_{S} ist:

$$\begin{aligned} \delta W_{\mathrm{S}} &= \delta m\, g\, h && (5)\\ &= 4\pi r^2\,\delta r\,\rho_{\mathrm{H_2O}}\, g\, h && (6) \end{aligned}$$

Die Vergrösserung der Oberfläche *benötigt* Energie; diese Arbeit ist also negativ:

$$\begin{aligned} \delta W_{\mathrm{O}} &= -\,\delta A\,\sigma && (7)\\ &= -8\pi r\,\delta r\,\sigma && (8) \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den Radius $r = r_0$ der Dampfblase lautet dann:

$$\begin{aligned} \delta W_{\mathrm{D}} + \delta W_{\mathrm{S}} + \delta W_{\mathrm{O}} &= 0 && (9)\\ 4\pi r^2\, p_{\mathrm{D}}\,\delta r + 4\pi r^2\,\delta r\,\rho_{\mathrm{H_2O}}\, g\, h - 8\pi r\,\delta r\,\sigma &= 0 && (10) \end{aligned}$$

$$\boxed{r = r_0 = \frac{2\sigma}{p_{\mathrm{D}} + \rho_{\mathrm{H_2O}} \cdot g \cdot h}} \tag{11}$$

Dabei sind

p_{D}	Dampfdruck des Wassers
$\rho_{\mathrm{H_2O}}$	Dichte des Wassers
σ	Oberflächenspannung des Wassers
r_0	Gleichgewichtsradius der Dampfblase
h	Höhe der Dampfblase über dem unteren Ende der Wassersäule

Ist der Radius r einer in der Flüssigkeit vorhandenen Dampfblase gross ($r > r_0$), so wächst die Blase, und die Flüssigkeitssäule reisst ab. Eine Blase mit $r < r_0$ kann sich dagegen nicht vergrössern.

4 Hinweis

Das Ulmensterben wird durch einen Pilz verursacht. Dieser Pilz scheidet eine Substanz aus, welche die Oberflächenspannung des Wassers vermindert. Dadurch reisst die entsprechende Wassersäule im Baum ab, und der Baum vertrocknet.