

## 5.8.1 Interferenz von Wasserwellen

\*\*\*\*\*

### 1 Motivation

Zwei synchron periodisch in Wasser eintauchende punktförmige Stifte erzeugen kreisförmige Wellenzüge. Die Kreiswellen interferieren, und es ergeben sich die typischen Interferenz-Hyperbelmuster.

### 2 Experiment

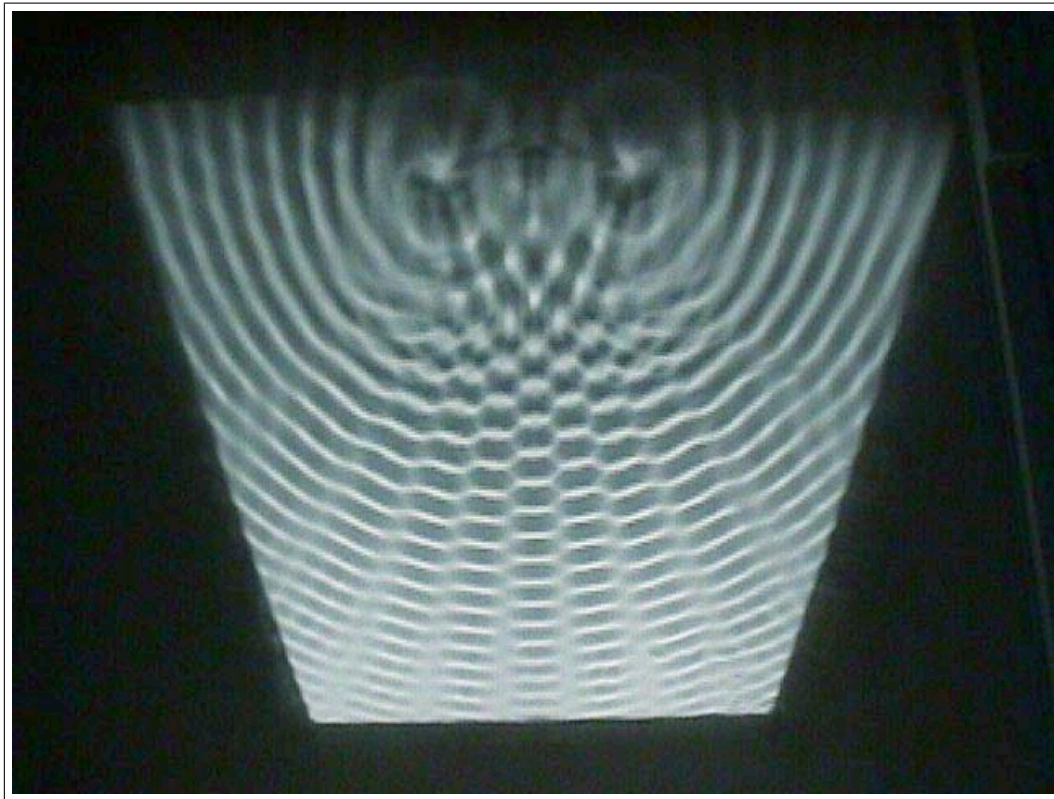


Abbildung 1: Interferenzhyperbeln zweier synchronen Kreiswellen in Wasser.

Zwei synchron periodisch in Wasser eintauchende punktförmige Stifte erzeugen kreisförmige Wellenzüge. Die Kreiswellen interferieren, und es ergeben sich die typischen Interferenz-Hyperbelmuster (siehe Abb. 1). Durch Ändern der Frequenz  $\nu$  ändert sich die Wellenlänge  $\lambda$  gemäss

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (1)$$

wobei  $c$  die Phasengeschwindigkeit der Welle ist. Dementsprechend ändert sich auch das Interferenzbild.

### 3 Theorie

#### 3.1 Interferenz zweier Kreiswellen

Es seien  $\xi_1, \xi_2$  zwei von den Quellen  $\mathbf{Q}_1$  bzw.  $\mathbf{Q}_2$  ausgehende harmonische Kreiswellen mit zwei fest korrelierten Phasen  $\delta_1$  und  $\delta_2$ . Für die folgende Rechnung werden wir der Einfachheit halber  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  annehmen (siehe Abb. 2). Im Gegensatz zur Kugelwelle nimmt die Amplitude einer Kreiswelle nur mit  $1/\sqrt{r}$  ab. Dies garantiert wiederum die Erhaltung der Energie. Die Koordinaten der beiden Quellen seien

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} +a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Somit gilt für die beiden Wellen:

$$\xi_1(r, t) = \frac{A}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}} \cos(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - \omega t) \quad (3)$$

$$\xi_2(r, t) = \frac{A}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}} \cos(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| - \omega t) \quad (4)$$

Interferenzmaxima ergeben sich, falls

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = n\lambda, \quad |n| = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Exakt ist diese Beziehung nur dann richtig, falls die Amplituden konstant sind. Da sie aber mit der Entfernung abnehmen, können kleine Korrekturen auftreten, die wir hier aber nicht berücksichtigen werden.

Wir wollen nun die Kurven bestimmen, auf denen die Interferenzmaxima zu finden sind. Das Einsetzen der Ortsvektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  in Gl. 5 ergibt

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = n\lambda \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{(x+a)^2 + y^2} &= n\lambda + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\ (x+a)^2 + y^2 &= n^2\lambda^2 + 2n\lambda\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x-a)^2 + y^2 \\ \Rightarrow 2n\lambda\sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= 4ax - n^2\lambda^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Nach nochmaligem Quadrieren und Umformen erhält man schliesslich das folgende Ergebnis:

$$y^2 = \frac{(4a^2 - n^2\lambda^2)}{n^2\lambda^2}x^2 - \frac{(4a^2 - n^2\lambda^2)}{4} \quad (8)$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbelschar mit  $n$  als Parameter (siehe Abb. 2).

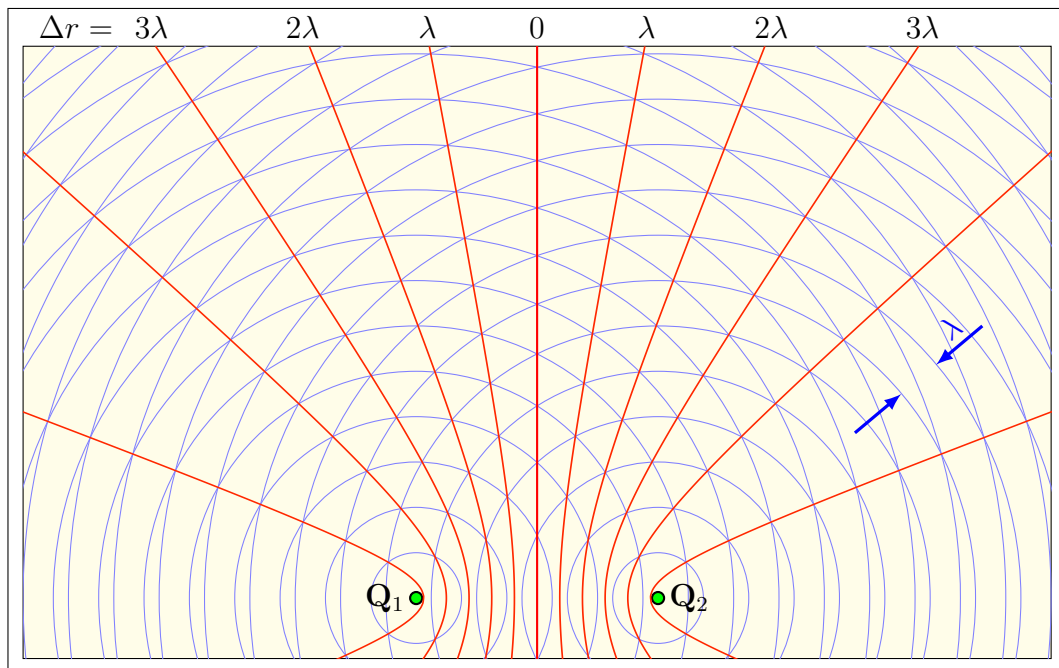


Abbildung 2: Interferenz zweier Kreiswellen mit fester Phasenbeziehung.

### 3.2 Wasserwellen

Eine Reihe verschiedener Wellenphänomene lässt sich besonders gut bei Wasserwellen beobachten. Wir behandeln dieses Kapitel erst jetzt, weil diese Wellen viel komplizierter sind als alle andern, die wir bis jetzt kennen gelernt haben, und wir verzichten fast vollständig auf Ableitungen. Wir beginnen mit der Besprechung der sogenannten **Tiefseewellen**. Bei diesen ist die Wassertiefe  $h$  sehr gross verglichen mit der Wellenlänge  $\lambda$ ,  $h \gg \lambda$ . Die Beobachtung zeigt, dass ein einzelner, ursprünglich ruhender Punkt  $\mathbf{r}_0$  auf der Oberfläche eine annähernd kreisförmige Bewegung  $\mathbf{r}(t)$  mit Radius  $a$  durchführt (siehe Abb. 3).

Für die Koordinaten des Punktes  $\mathbf{r}(t)$  gilt somit näherungsweise:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + a \cdot \begin{pmatrix} \cos(kx_0 - \omega t) \\ \sin(kx_0 - \omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cos(kx_0 - \omega t) \\ z_0 + a \cdot \sin(kx_0 - \omega t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Die **Bahngeschwindigkeit**  $v_0$  der einzelnen Wasserteilchen beträgt demnach:

$$v_0 = \omega a \quad (10)$$

Diese ist zu unterscheiden von der **Phasengeschwindigkeit**  $v_p$ , die (wie immer) der folgenden Gleichung genügt:

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (11)$$

Auf dem Wellenbuckel hat  $\mathbf{v}_0$  die gleiche Richtung wie  $\mathbf{v}_p$ , im Wellental ist  $\mathbf{v}_0$  antiparallel zu  $\mathbf{v}_p$ . Dazwischen ist der Winkel zwischen  $\mathbf{v}_p$  und  $\mathbf{v}_0$  beliebig. Wasserwellen sind somit eine **Superposition von Transversal- und Longitudinalwellen**.

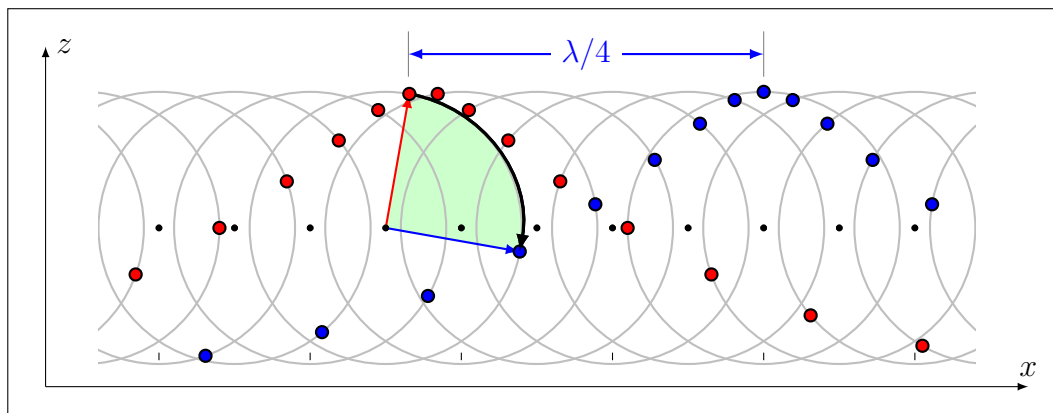


Abbildung 3: Nach rechts wandernde Wasserwelle zu den Zeiten  $t = 0$  und  $t = T/4$ .

Die Form der Wasseroberfläche erhalten wir, indem wir in Gleichung 9 den Parameter  $x_0$  eliminieren. Je nach dem Verhältnis von Wellenhöhe  $H$  zu Wellenlänge  $\lambda$

$$\boxed{\frac{H}{\lambda} = \frac{2a}{\lambda}} \quad (12)$$

sieht das Wellenbild ganz verschieden aus. Nur für  $(H/\lambda) \ll 1$  finden wir den gewohnten sinusförmigen Wellenzug (siehe Abb. 4).

Bei grösserem  $H/\lambda$  werden die Wellenberge schmaler und die Wellentäler breiter. Im Grenzfall  $(H/\lambda) = 1/\pi \approx 0,32$  erhalten wir eine Zykloide (Abb. 4):

Mit zunehmender Windstärke und länger andauerndem Wind, nehmen sowohl  $\lambda$  wie auch  $H$  zu. Bei eigentlichen Tiefseewellen bleibt das Verhältnis von  $(H/\lambda)$  aber meist im Bereich 1/10 bis 1/13.

Die Phasengeschwindigkeit<sup>1</sup> der Tiefseewellen beträgt:

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}} \quad (13)$$

Daraus finden wir auch leicht die Gruppengeschwindigkeit:

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} (gk)^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_p} \quad (14)$$

Wir haben also in diesem Fall eine ausgeprägte Dispersion, die Gruppengeschwindigkeit ist nur halb so gross wie die Phasengeschwindigkeit.

<sup>1</sup>Wir können dieses Resultat (bis auf einen konstanten Faktor) aus einer Dimensionsanalyse ableiten. Der gleiche Trick funktioniert auch bei Wellen in seichten Wasser und für Kapillarwellen!

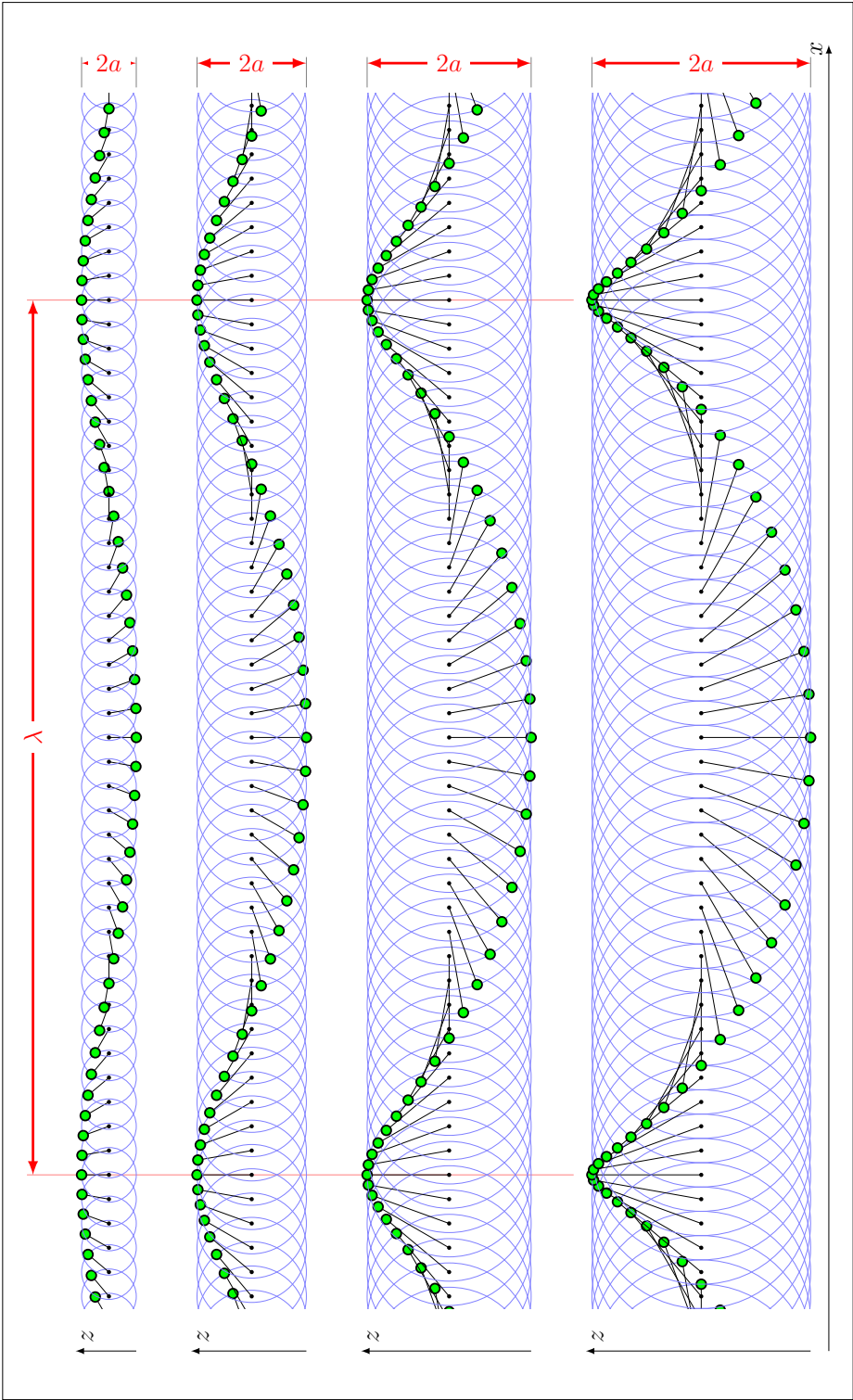


Abbildung 4: Wasserwellen unterschiedlicher Amplitude.

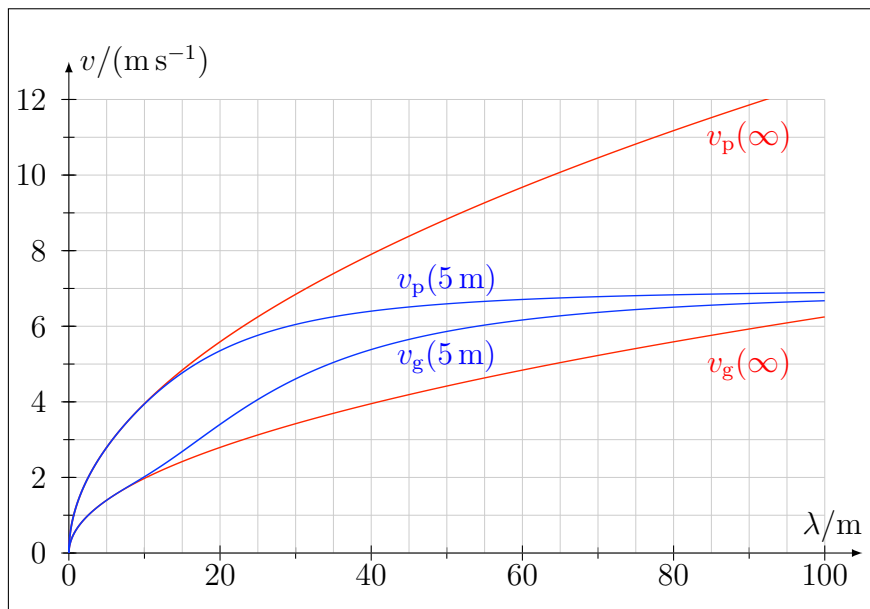


Abbildung 5: Gruppen- und Phasengeschwindigkeit von Wasserwellen als Funktion von  $\lambda$  bei  $\sigma = 0$  und  $h \rightarrow \infty$  bzw.  $h = 5$  m.

Ganz anders sind die Verhältnisse bei Wellen in seichtem Wasser (Wassertiefe  $h$  klein gegenüber der Wellenlänge,  $(H/\lambda) \ll 1$ ):

$$v_g = v_p = \sqrt{gh} \quad (15)$$

Im Übergangsbereich gilt:

$$v_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} \sqrt{gh} \quad (16)$$

In Abb. 5 sind  $v_g$  und  $v_p$  für 2 verschiedene Wassertiefen ( $h = 5$  m und  $h \rightarrow \infty$ ) aufgezeichnet. Lläuft eine Welle von tieferem Wasser in weniger tiefes, so bleibt natürlich die Periode  $T$  oder die Frequenz  $\nu$  der Welle gleich. Da aber

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \nu \lambda \quad (17)$$

kleiner wird, wird auch  $\lambda$  kleiner. Das hat zur Folge, dass  $H/\lambda$  zunimmt und wir die typischen brechenden Brandungswellen erhalten.

Für ganz kleine Wellenlängen ist auch dieser Ausdruck (Gleichung 16) nicht korrekt. Wir müssen noch die Oberflächenspannung  $\sigma$  mitberücksichtigen. Diese beträgt bei einer Wasser/Luft-Oberfläche etwa  $\sigma = 0,073$  N/m. Für die Phasengeschwindigkeit in diesem Bereich gilt

$$v_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}, \quad (18)$$

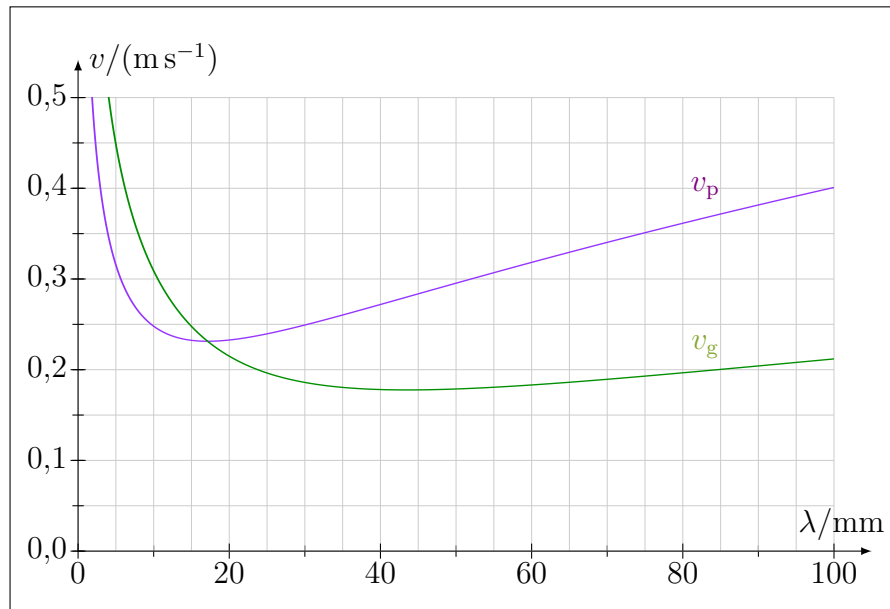


Abbildung 6: Gruppen- und Phasengeschwindigkeit als Funktion von  $\lambda$  bei  $\sigma = 0,072 \text{ N/m}$  und  $h \rightarrow \infty$ .

wobei  $\rho$  die Dichte des Wassers ist und wir diesmal  $h$  als  $\infty$  gross angenommen haben. Es zeigt sich (vgl. Abb. 6), dass  $u_p$  ein Minimum bei  $\lambda \approx 17 \text{ mm}$  hat.

Im Minimum sind

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} = v_p \quad (19)$$

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit gleich gross:  $v_p = v_g \approx 0,23 \text{ m/s}$ .

Diese Dispersionserscheinungen lassen sich besonders gut bei Schiffswellen beobachten. Bei einem Schiff mit der Wasserlinienlänge  $L$ , das sein eigenes Wellensystem nicht verlassen kann<sup>2</sup>, erhalten wir für die maximale Schiffsgeschwindigkeit  $v_{\max}$ :

$$v_{\max} \approx v_p(\lambda = L) = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \approx 1,25 \frac{\text{m}^{1/2}}{\text{s}} \sqrt{L} \quad (20)$$

<sup>2</sup>Man spricht hier von einem sog. Verdränger (Jachten, Dampfschiffe, ...). Die Überlegungen gelten aber nicht für Turngeräte (Gleitjollen, Surfbretter, ...).