

5.1.7 Schwebungen auf PC

1 Motivation

Zwei harmonische Schwingungen gleicher Amplitude und leicht unterschiedlicher Frequenz erzeugen durch Interferenz Schwebungen, die am PC sichtbar gemacht werden.

2 Experiment



Abbildung 1: Versuchsaufbau „Schwebungen auf PC“

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 1 zu sehen. Zwei harmonische Schwingungen gleicher Amplitude und leicht unterschiedlicher Frequenz erzeugen durch Interferenz Schwebungen, die am PC sichtbar gemacht werden. Die Schwebungen werden auf drei verschiedene Anordnungen erzeugt:

- a) Zwei Sinusschwingungen und ihre Summe werden im PC berechnet und auch als Funktion der Zeit dargestellt. Das Summensignal wird auf einen Verstärker mit angeschlossenem Lautsprecher gegeben.
- b) Zwei identische Stimmgabeln werden angeregt. Der Schall wird mit einem Schalldruck-Messgerät gemessen, das dann die elektronischen Signale für den PC liefert. Durch Erwärmen einer der beiden Stimmgabeln wird deren Eigenfrequenz geändert, so dass sich eine Schwebung ergibt.
- c) Zwei Orgelpfeifen werden mit Pressluft zum Schwingen angeregt. Die Frequenz einer Orgelpfeife lässt sich durch Verschieben eines Stöpsels verändern und so die dadurch bewirkte Schwebung am PC beobachten.

Verschiedene Schwingungen werden in Abbn. 2 - 9 gezeigt. Die Abbn. 8 und 9 enthalten auch die zugehörigen Frequenzspektren.

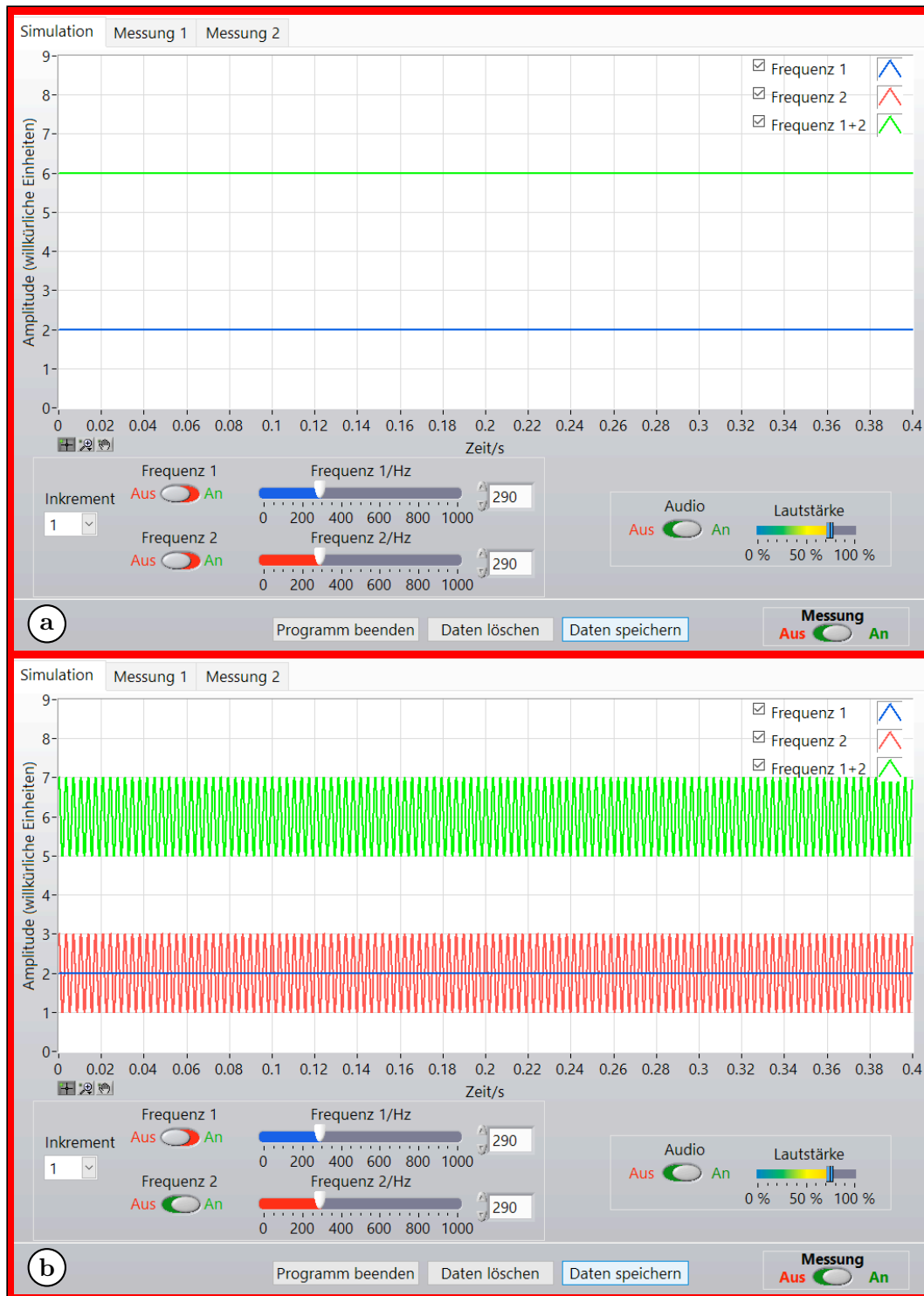


Abbildung 2: Zwei Sinusschwingungen mit Frequenz ν_i und Amplitude A_i , ($i = 1, 2$):
 a) $A_1 = A_2 = 0$, b) $A_1 = 0$, $A_2 = A$.

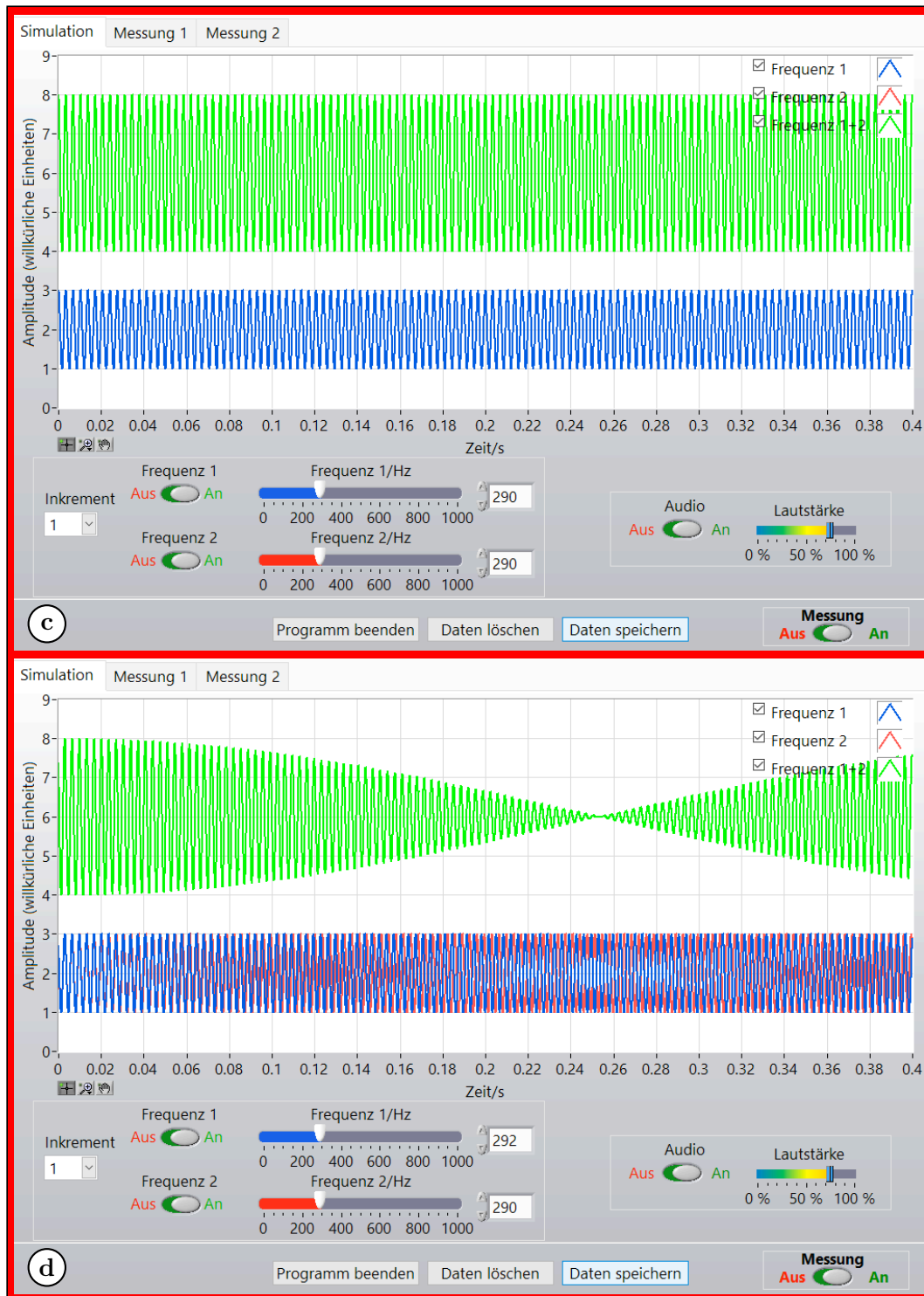


Abbildung 3: Zwei Sinusschwingungen mit Frequenz ν_i und Amplitude A_i , ($i = 1, 2$):
 c) $\nu_1 = \nu_2 = 290$ Hz und $A_1 = A_2 = 1$, d) $\nu_1 = 292$ Hz, $\nu_2 = 290$ Hz und $A_1 = A_2 = 1$. Die Frequenzdifferenz 2 Hz führt zur Schwebung.

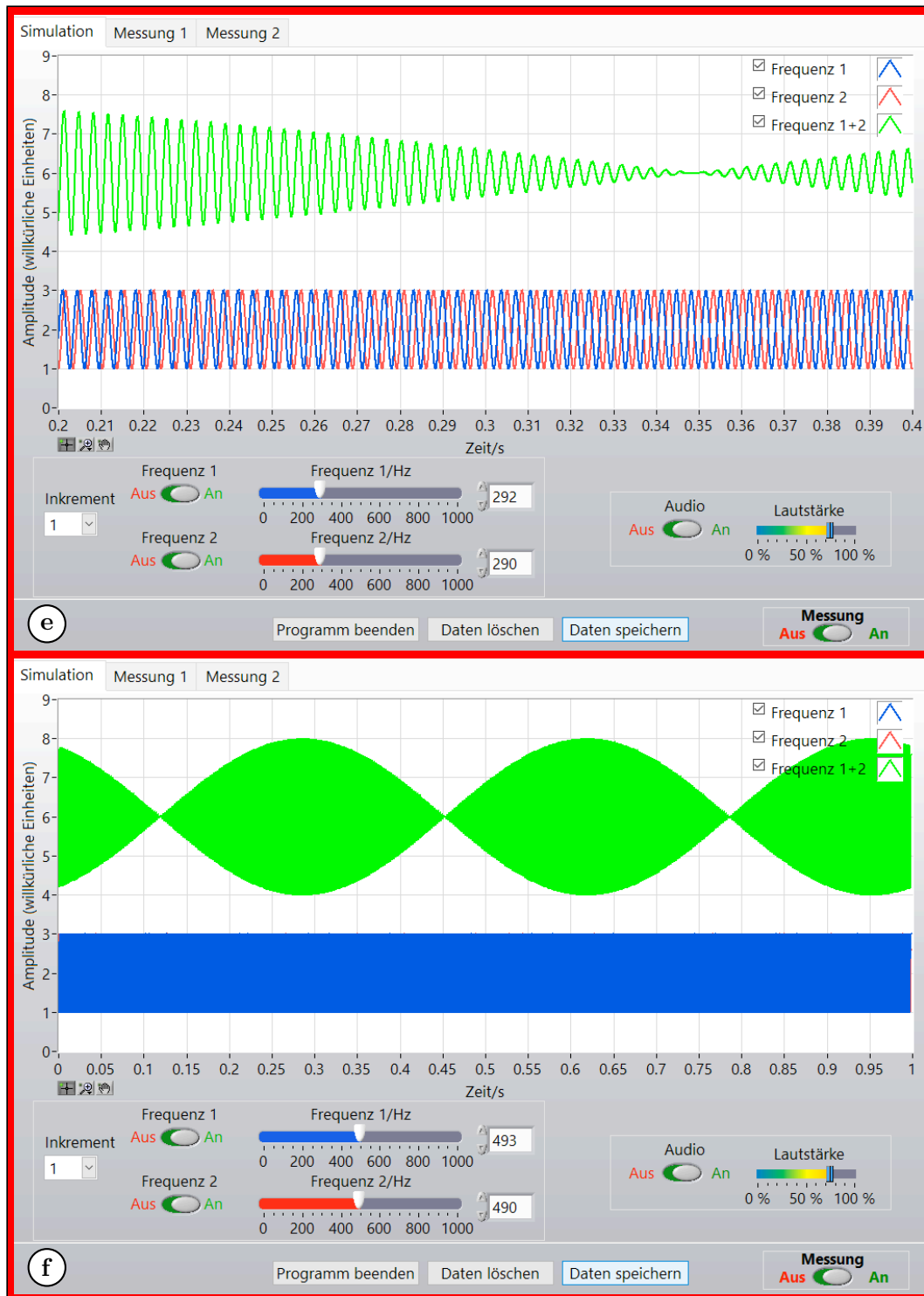


Abbildung 4: Zwei Sinusschwingungen mit Frequenz ν_i und Amplitude A_i , ($i = 1, 2$):
 e) $\nu_1 = 292$ Hz, $\nu_2 = 290$ Hz und $A_1 = A_2 = 1$ (Wie Bild d), aber im Zeitmassstab um den Faktor 2 gedehnt), f) $\nu_1 = 493$ Hz, $\nu_2 = 490$ Hz und $A_1 = A_2 = 1$.

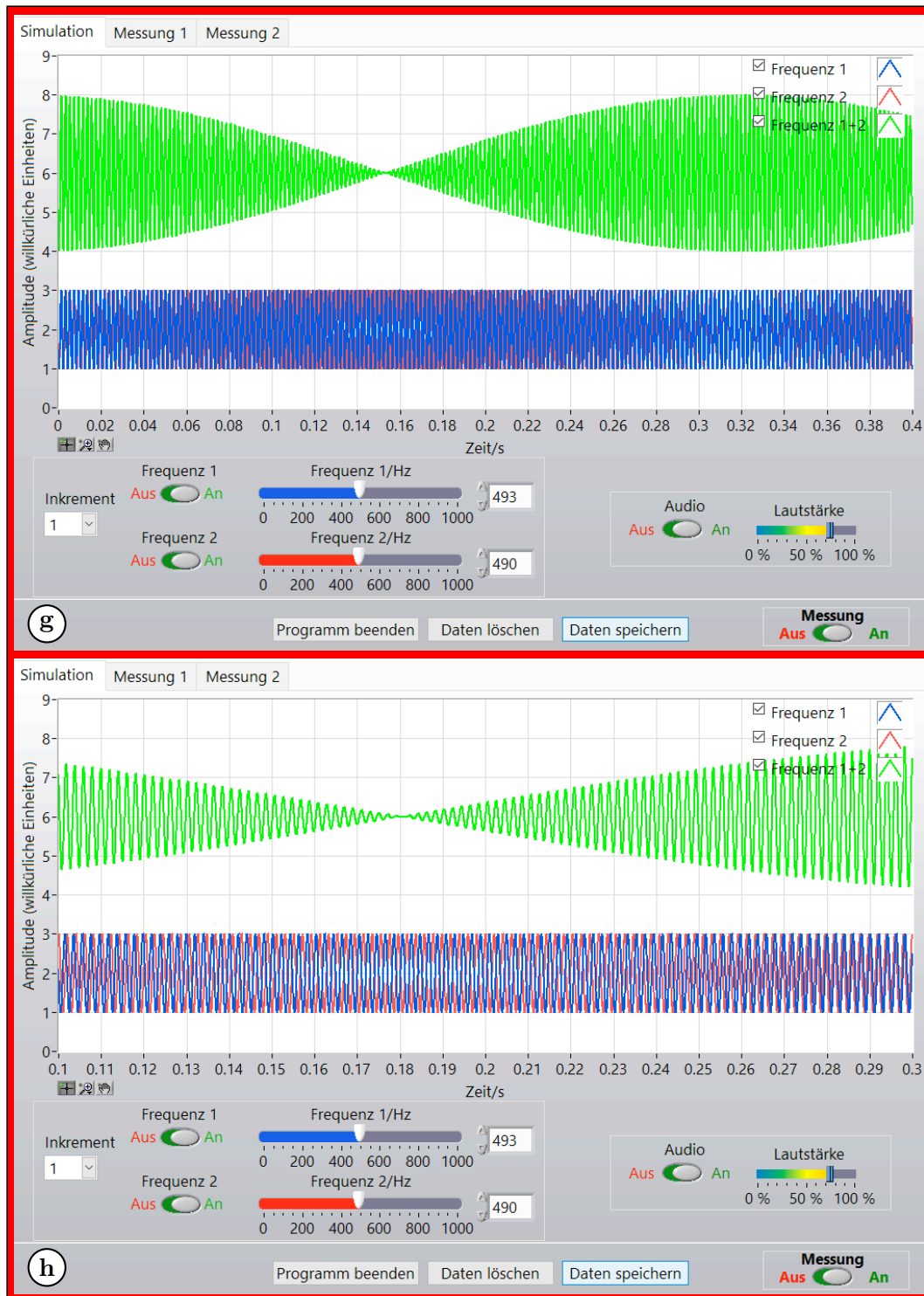


Abbildung 5: Zwei Sinusschwingungen mit Frequenz $\nu_1 = 493 \text{ Hz}$, $\nu_2 = 490 \text{ Hz}$, Amplitude $A_1 = A_2 = 1$ und Zeitintervall Δt : g) $\Delta t = 400 \text{ ms}$, h) $\Delta t = 300 \text{ ms}$

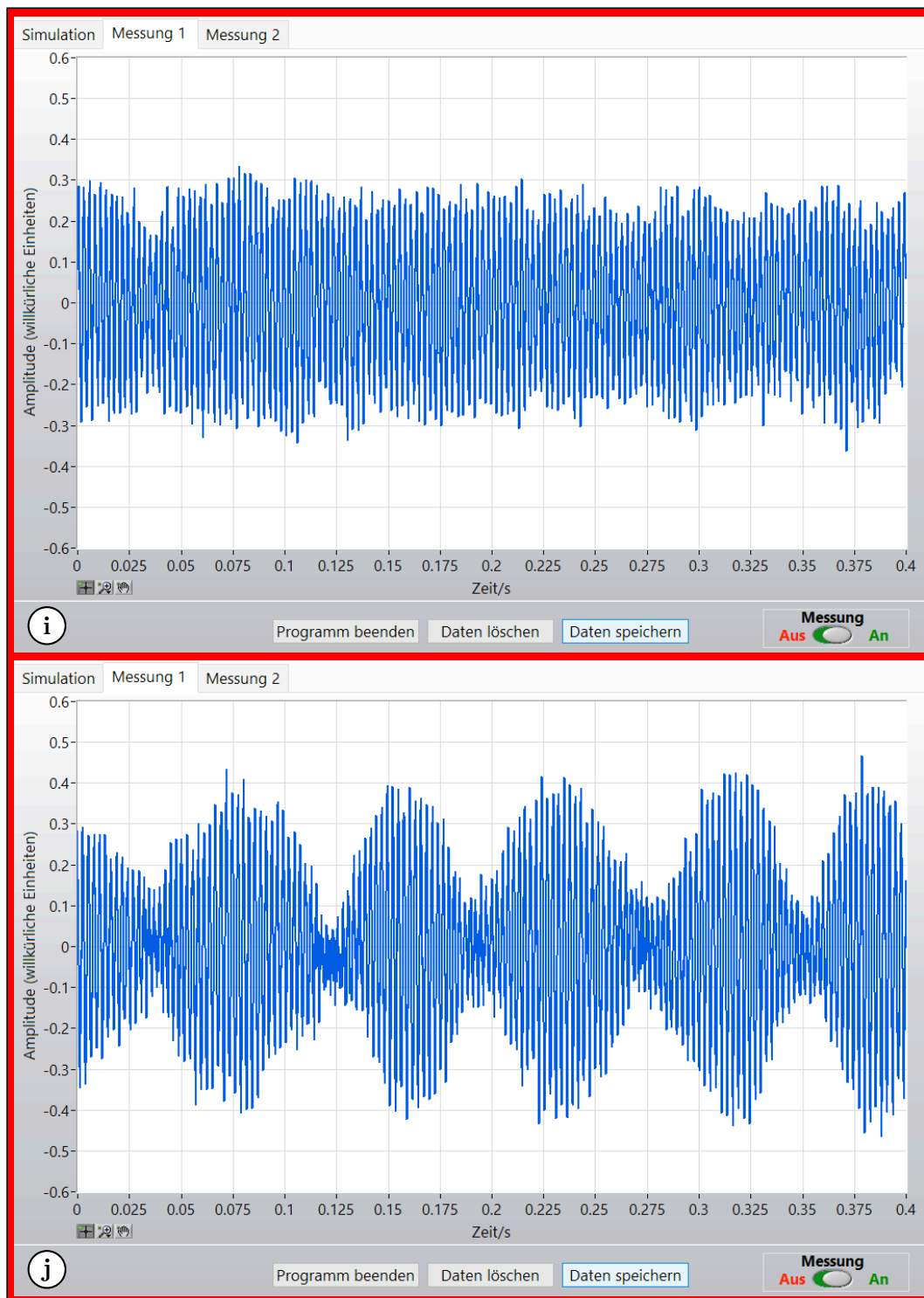


Abbildung 6: Zwei Orgelpfeifen: i) Gleiche Frequenz, j) Unterschiedliche Frequenz führt zu Schwebung.

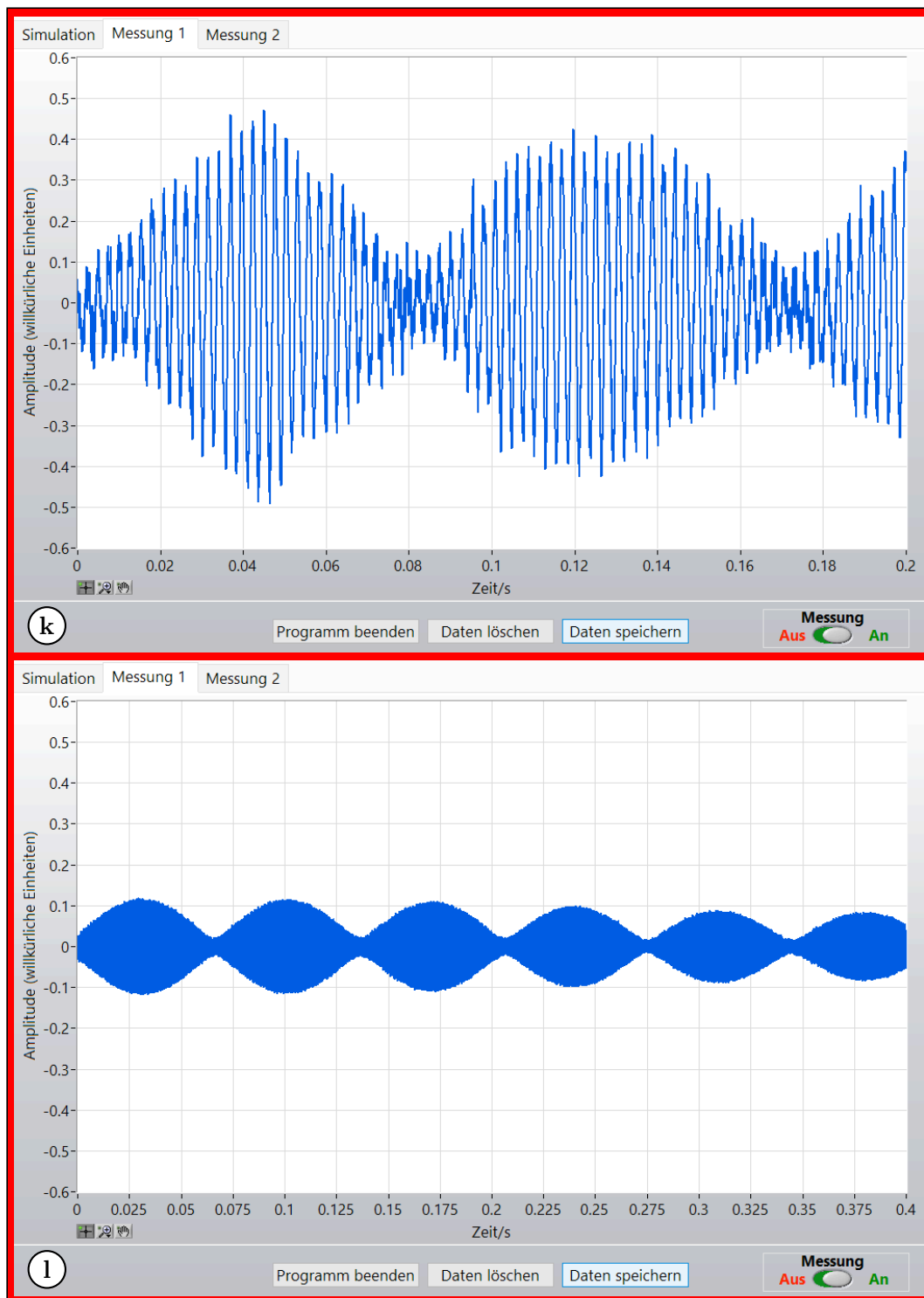


Abbildung 7: k) Zwei Orgelpfeifen unterschiedlicher Frequenz: Detail der Schwebung, l) Zwei Stimmgabeln unterschiedlicher Frequenz: Schwebung.

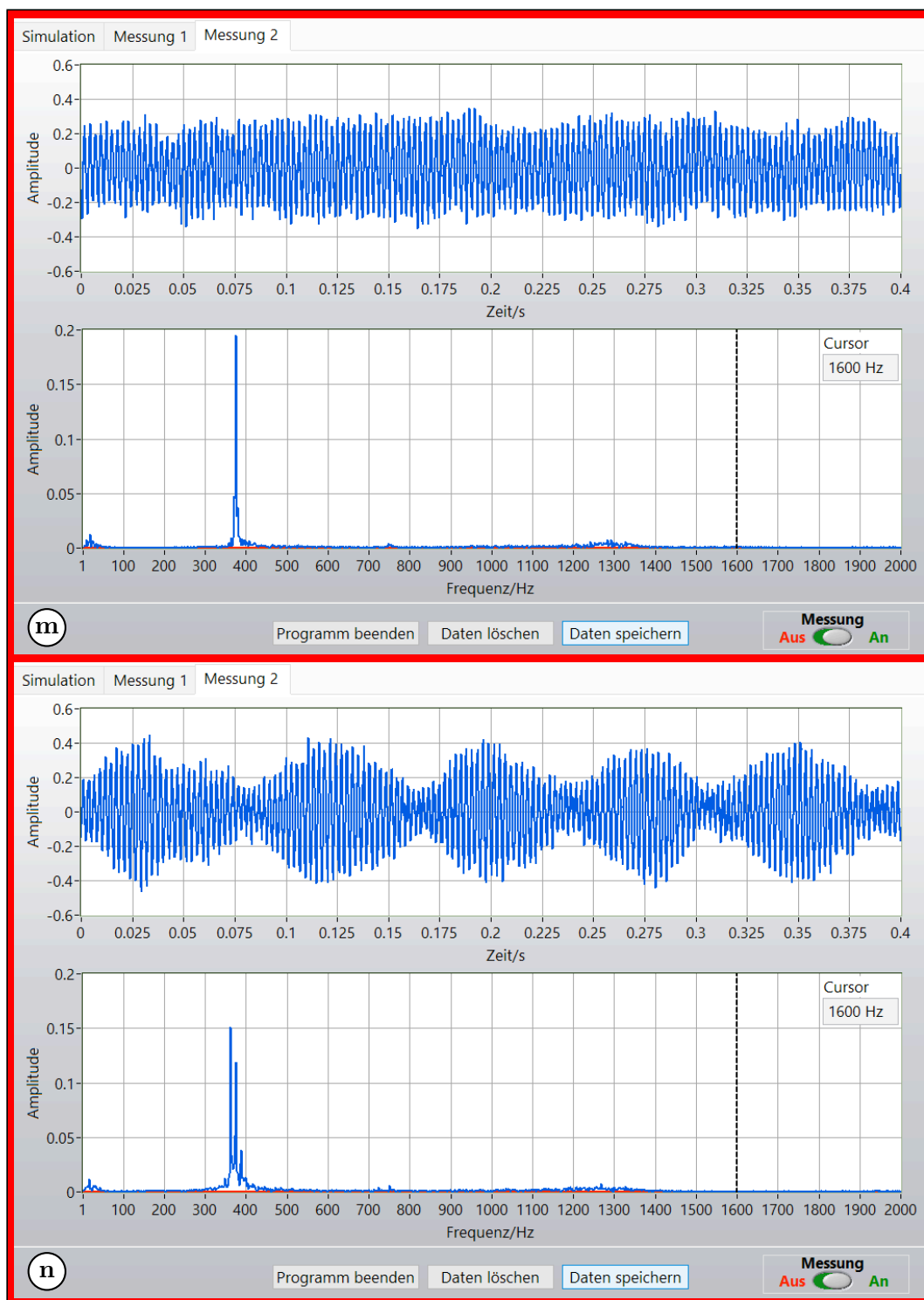


Abbildung 8: Schwingung und Frequenzspektrum zweier Orgelpfeifen: m) Gleiche Frequenz, n) unterschiedliche Frequenz.

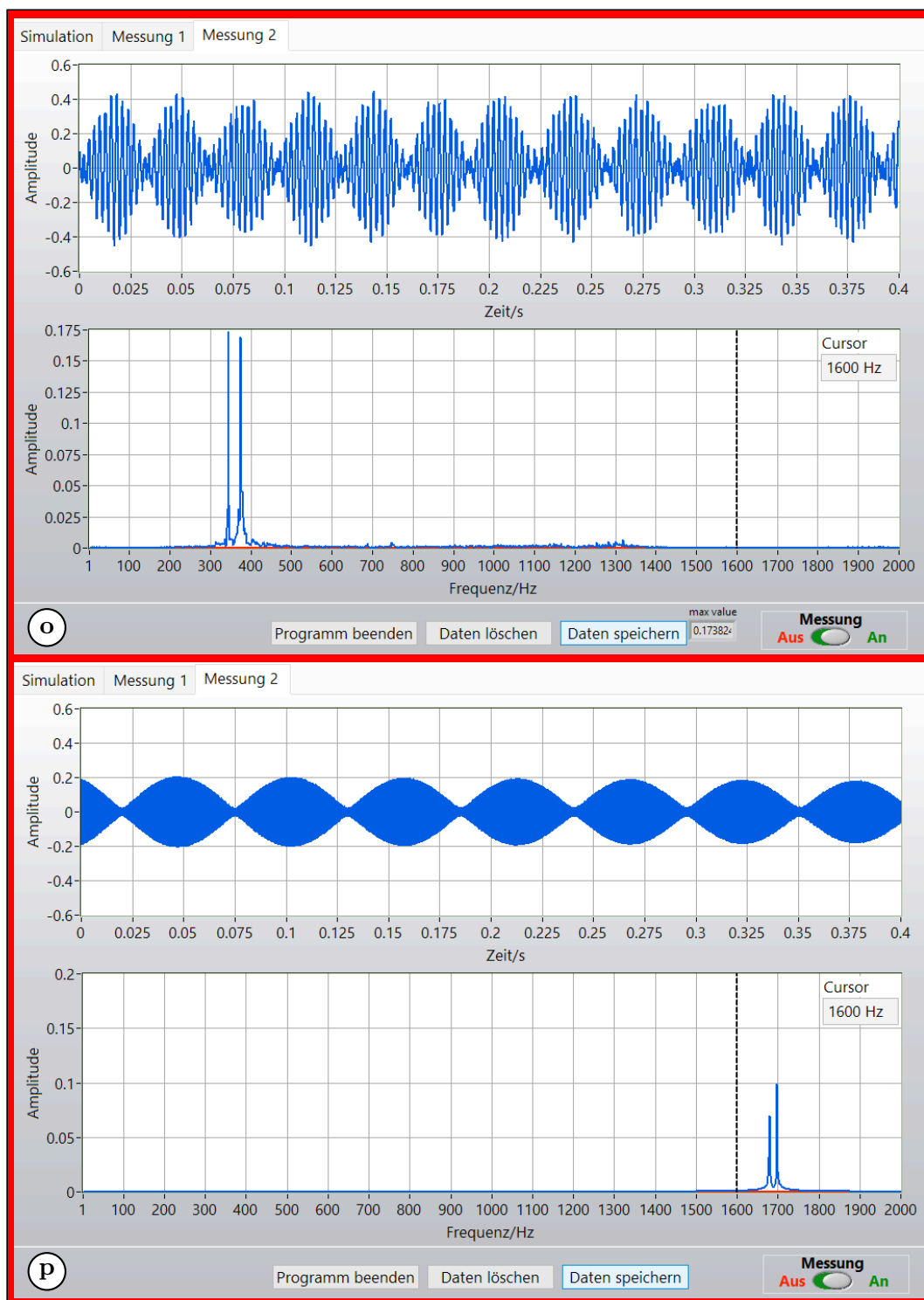


Abbildung 9: Schwingung und Frequenzspektrum zweier Schwebungen:
o) Zwei Orgelpfeifen, p) Zwei Stimmgabeln.

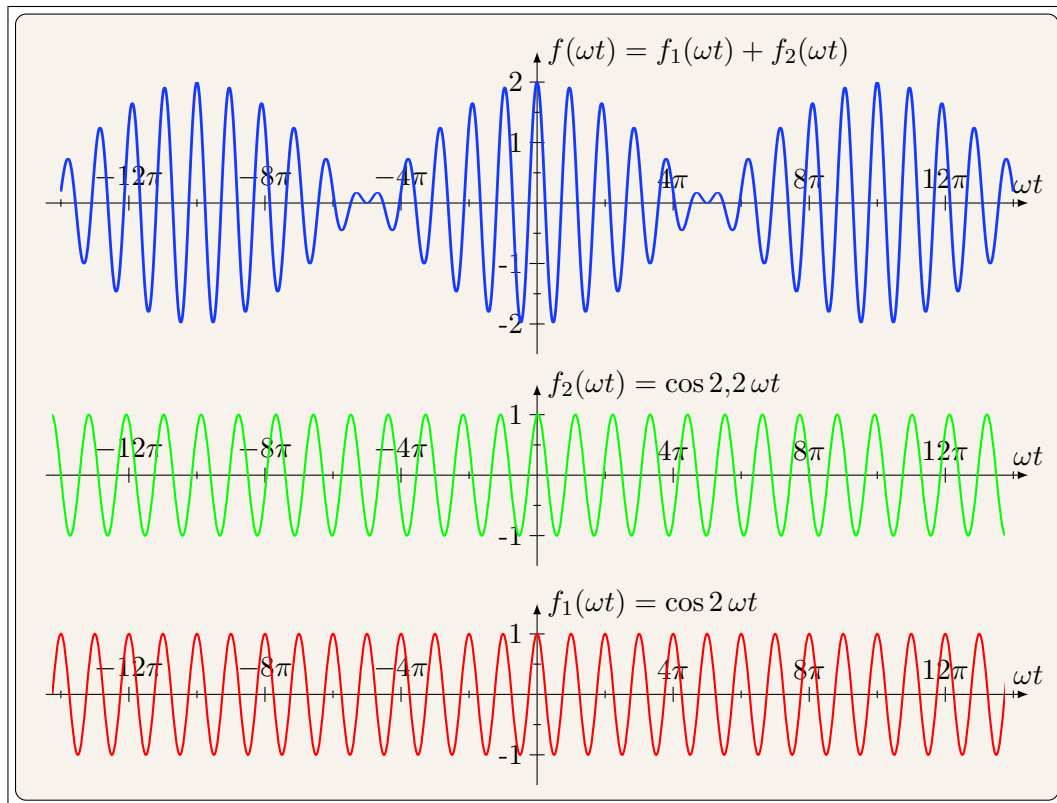


Abbildung 10: Schwebung

3 Theorie

3.1 Schwebung

Wir untersuchen die Superposition zweier Schwingungen gleicher Amplitude und gleicher Phase, aber unterschiedlicher Frequenz:

$$x_1(t) = A \cos \omega_1 t = \operatorname{Re} \{ A e^{i\omega_1 t} \} \quad (1)$$

$$x_2(t) = A \cos \omega_2 t = \operatorname{Re} \{ A e^{i\omega_2 t} \} \quad (2)$$

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t) = A \{ \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t \} \quad (3)$$

$$= 2A \cos \left\{ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right\} \cos \left\{ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right\} \quad (4)$$

Dieses Ergebnis kann leicht auf beliebige Phasen verallgemeinert werden.

Wir können Gl. (4) auch in der folgenden Form schreiben:

$$x(t) = \tilde{A}(t) \cdot \cos \left\{ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right\} \quad (5)$$

$$\text{mit } \tilde{A}(t) = 2A \cos \left\{ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right\} \quad (6)$$

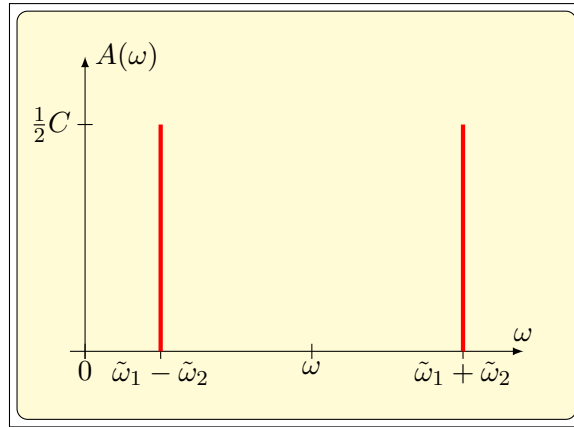


Abbildung 11: Amplitudenspektrum einer Schwebung.

Das ist die Gleichung einer **Schwebung**, bei der die Frequenz $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ eine rasche Oszillation ausführt, deren Amplitude sich aber langsam mit der halben Differenzfrequenz $|\omega_1 - \omega_2|/2$ ändert (Siehe Abb. 10).

Diese **Schwebungsfrequenz** ist gleich

$$\nu_S = \frac{\omega_S}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} \quad (7)$$

Die halbe Schwebungsperiode ist gleich

$$\tau := \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_S} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}. \quad (8)$$

Sie ist die Zeit zwischen zwei „Stillständen“ der Schwingung ($\tilde{A}(t) = 0$).

Um ein Musikinstrument der Frequenz ω_1 zu stimmen, wählt man eine Referenzfrequenz ω_2 und lässt $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ gehen, indem man die Schwebungsfrequenz misst und verkleinert.

Man kann selbstverständlich auch eine vorgegebene Schwebung wieder in eine Summe zweier Schwingungen verschiedener Frequenzen umwandeln:

Gegeben sei eine Schwebung

$$x(t) = C \cos \tilde{\omega}_2 t \cos \tilde{\omega}_1 t \quad (9)$$

mit $\tilde{\omega}_2 \ll \tilde{\omega}_1$.

Dies ergibt

$$x(t) = \frac{C}{2} \cos \{(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) t\} + \frac{C}{2} \cos \{(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) t\} \quad (10)$$

3.2 Amplitudenspektrum der Schwebung

Die Summe von Kosinusfunktionen in Gl. (10) wird charakterisiert durch zwei Frequenzen, zwei Amplituden und gegebenenfalls zwei Phasen. Wenn es auf die Phasen nicht ankommt, kann man die Schwebung statt mit Winkelfunktionen durch ein **Amplitudenspektrum** beschreiben, bei dem die Amplitude in Funktion der Frequenz aufgetragen ist. Das Amplitudenspektrum zur oben behandelten Schwebung ist **diskret** (im Gegensatz zu einer kontinuierlichen Verteilung), da genau zwei Frequenzen auftreten (siehe Abb. 11).