

## 5.10.802 Intensitätsverteilung der Beugung am Doppelspalt

\*\*\*\*\*

### 1 Motivation

**Beugung am Doppelspalt:** Wellen breiten sich nach dem Huygensschen Prinzip aus; ihre Amplituden werden superponiert (überlagert). Der Unterschied der Intensitätsverteilungen der beiden Einzelspalte zur Verteilung des Doppelspalts zeigt auf eindruckliche Weise die Interferenz der beiden Verteilungen.

### 2 Experiment

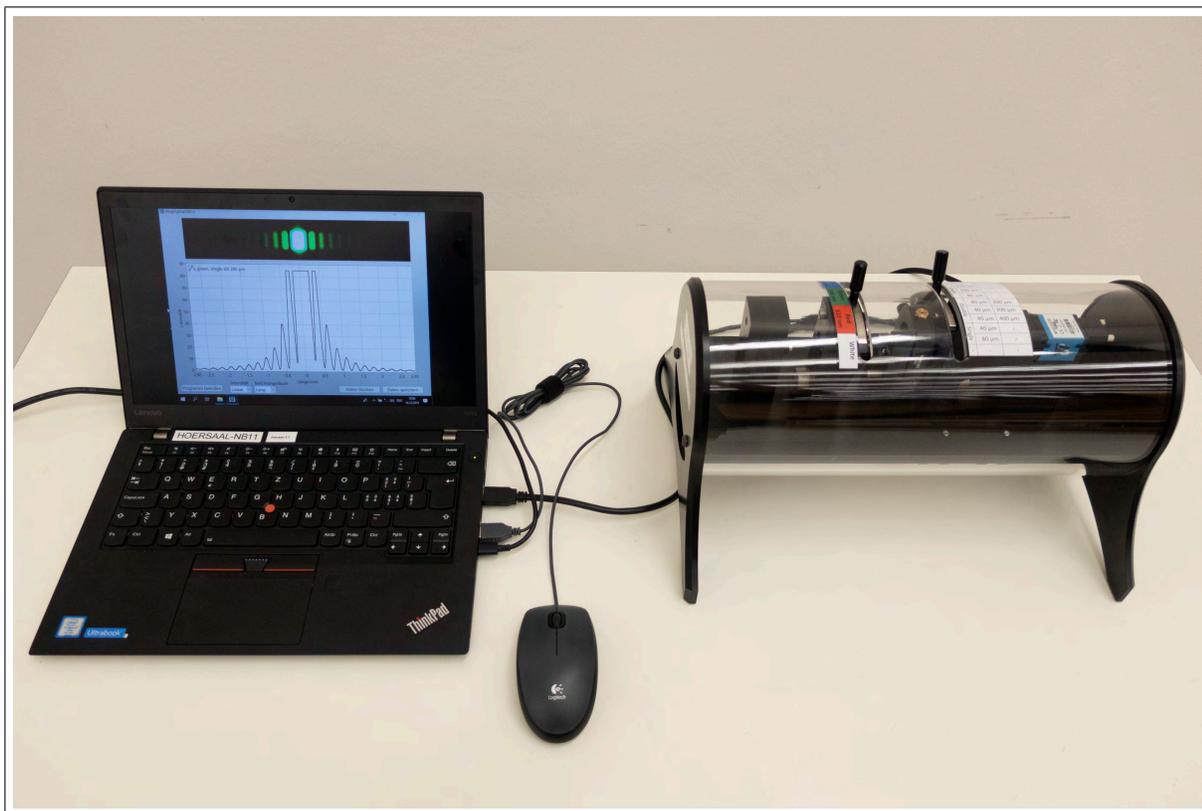


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau zur Beugung am Doppelspalt

Abb. 1 zeigt den experimentellen Aufbau. Das weiße Licht einer LED wird wahlweise an einem Spalt oder an einem Doppelspalt gebeugt (siehe Abb. 2). Das dabei entstehende Beugungsbild wird mit einer Videokamera aufgenommen und an einen PC übertragen. Dort sind sowohl das Beugungsbild als auch die dazugehörige Projektion der Intensitätsverteilung auf die horizontale Achse wiedergegeben. Mit einem Farbfilter wird rotes Licht erzeugt. Die Spaltbreite und der Spaltabstand seien  $d$  bzw.  $D$ . Die 1. Minima der Beugungsfiguren von Spalt bzw. Doppelspalt ergeben sich damit für

$$\sin \alpha = \lambda/d \quad \text{und} \quad \sin \beta = \lambda/(2D) \quad (1)$$



Abbildung 2: Beugung am Spalt: Detailansicht 1

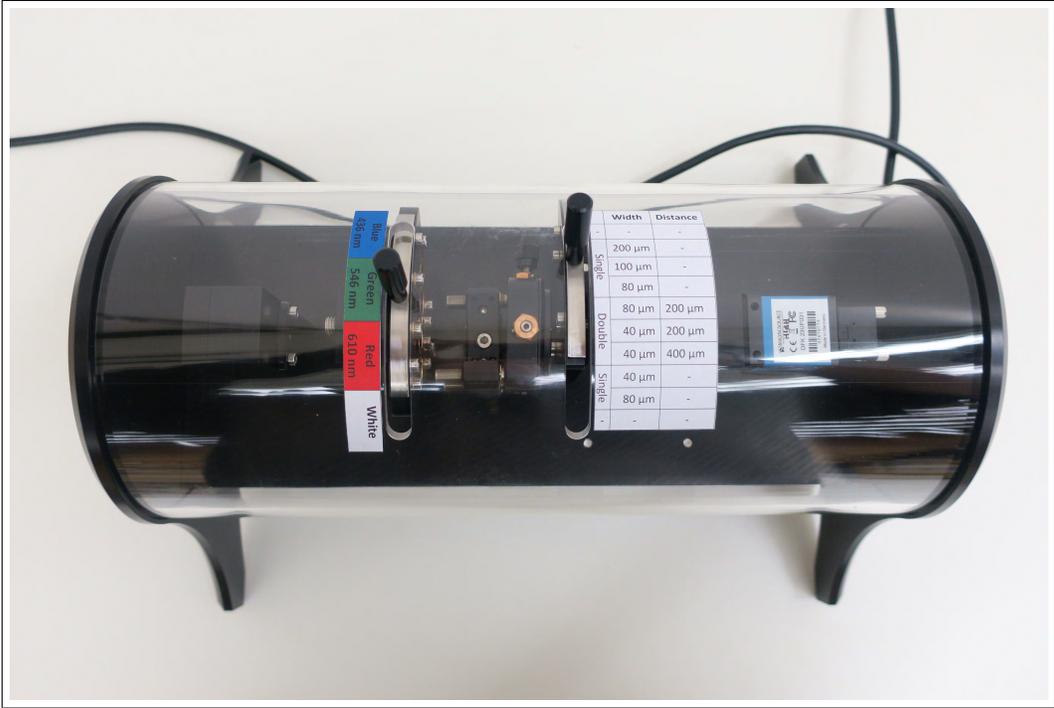


Abbildung 3: Beugung am Doppelspalt: Detailansicht 2

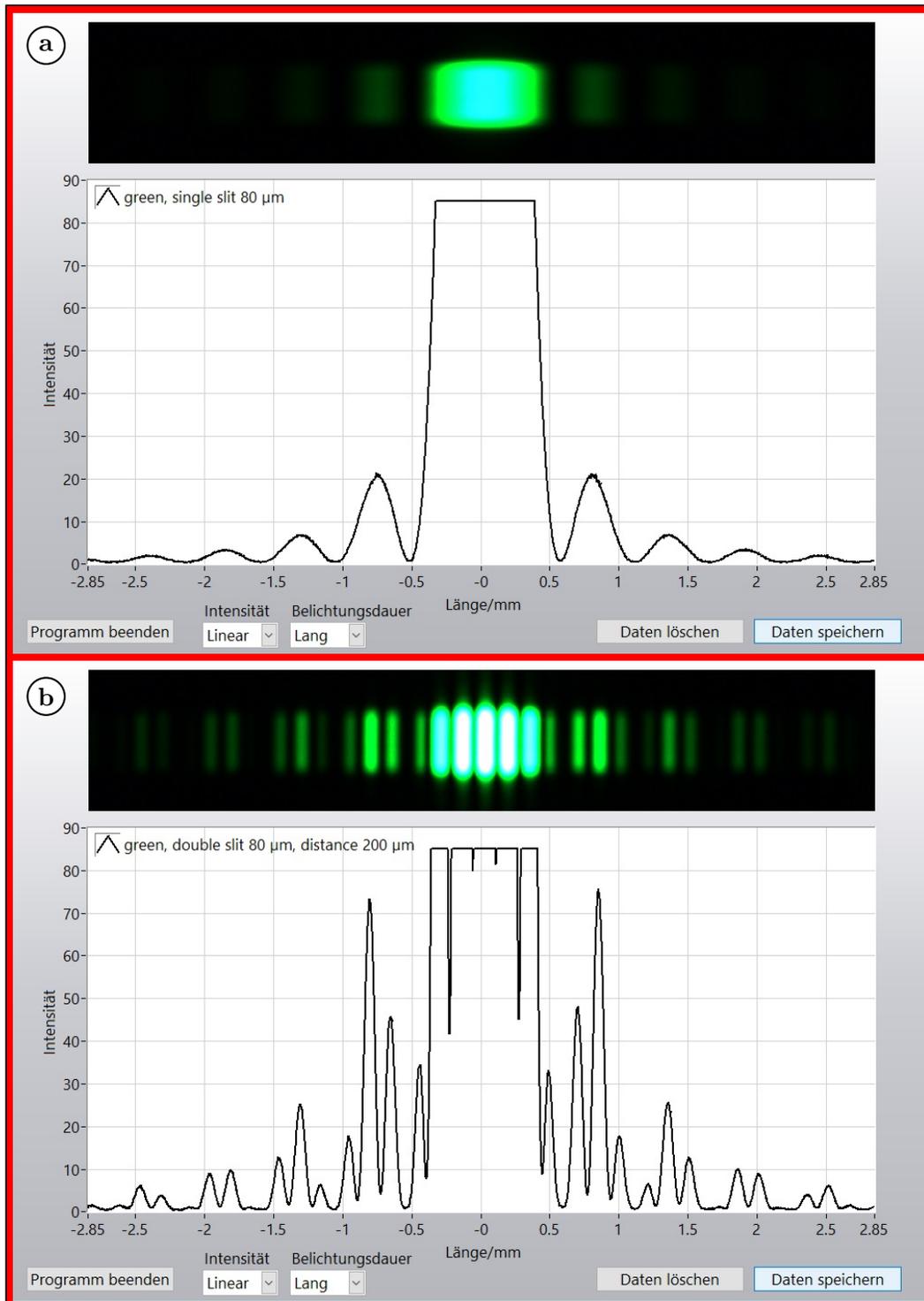


Abbildung 4: a)  $d = 80 \mu\text{m}$ , b)  $d = 80 \mu\text{m}$ ,  $D = 200 \mu\text{m}$

Die Beugungsbilder der beiden Einzelspalte interferieren, so dass das Beugungsbild des Doppelspalts wegen  $\beta \approx \alpha/5$  aufgefächert wird.

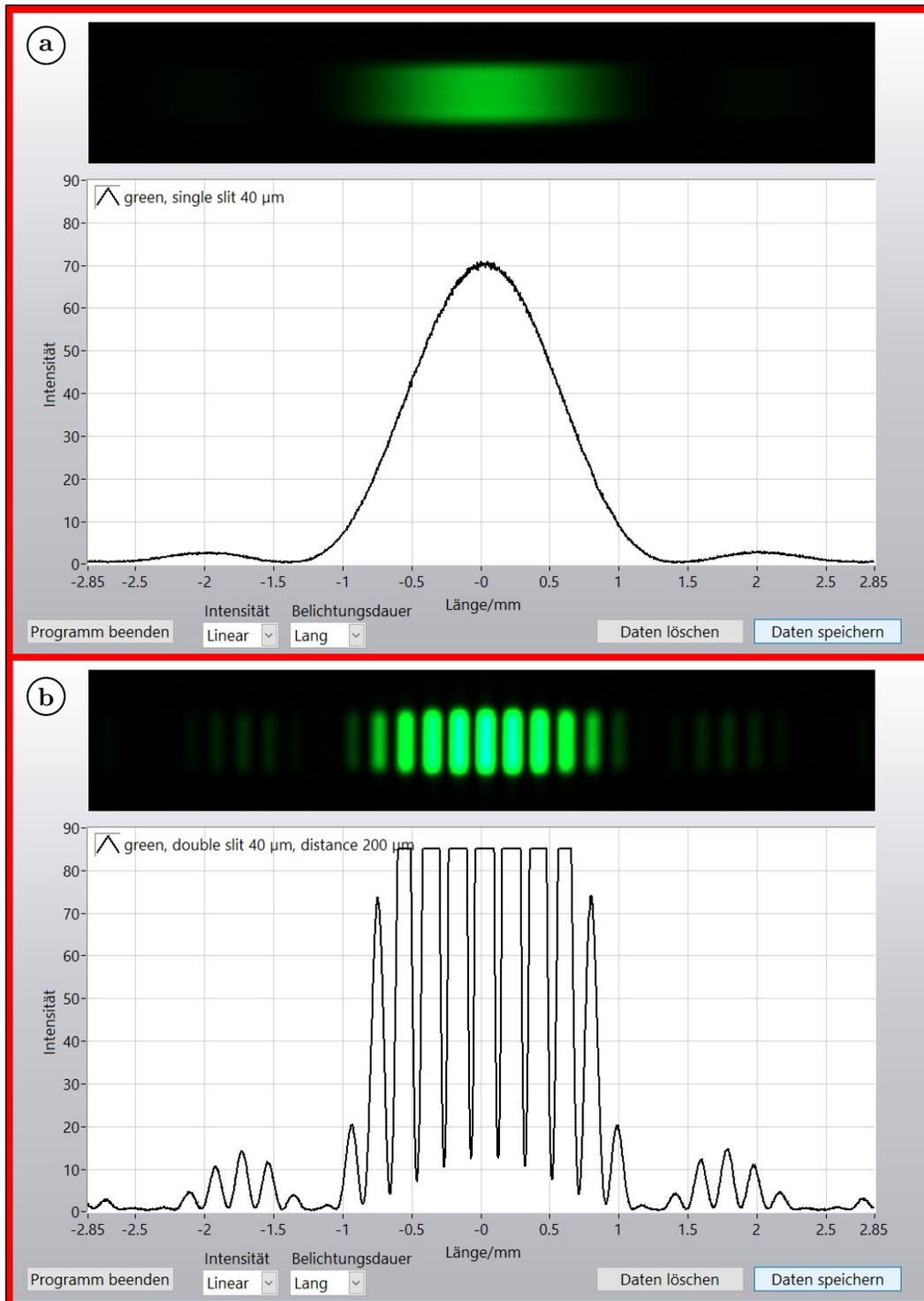


Abbildung 5: a)  $d = 40\ \mu\text{m}$ , b)  $d = 40\ \mu\text{m}$ ,  $D = 200\ \mu\text{m}$

Die Beugungsbilder der beiden Einzelspalte interferieren, so dass das Beugungsbild des Doppelspalts wegen  $\beta \approx \alpha/10$  aufgefächert wird.

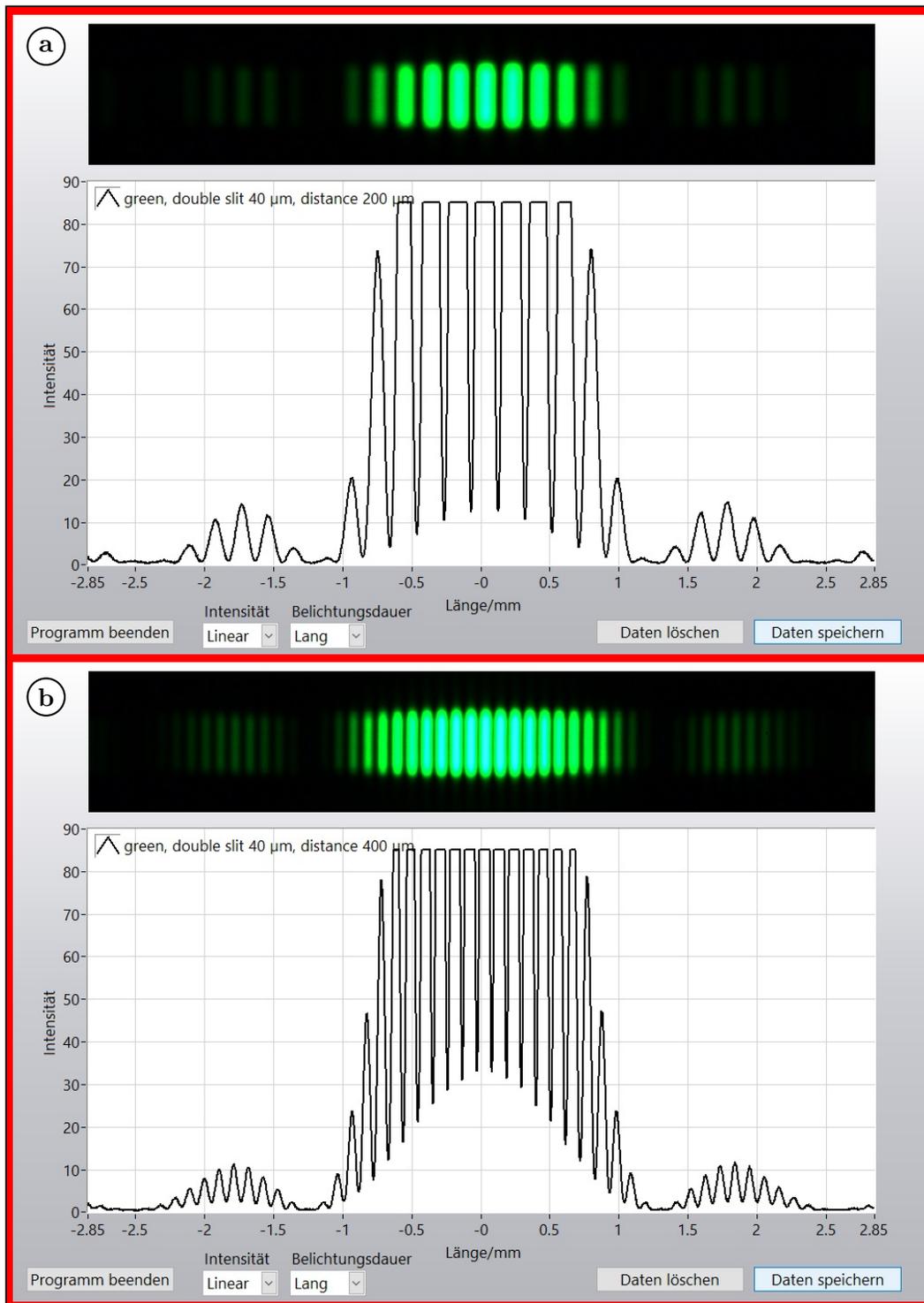


Abbildung 6: Spaltbreite  $d = 40 \mu\text{m}$ , a)  $D = 200 \mu\text{m}$ , b)  $D = 400 \mu\text{m}$

Der doppelte Abstand in 6 b) führt zur Verdoppelung der Feinstruktur!

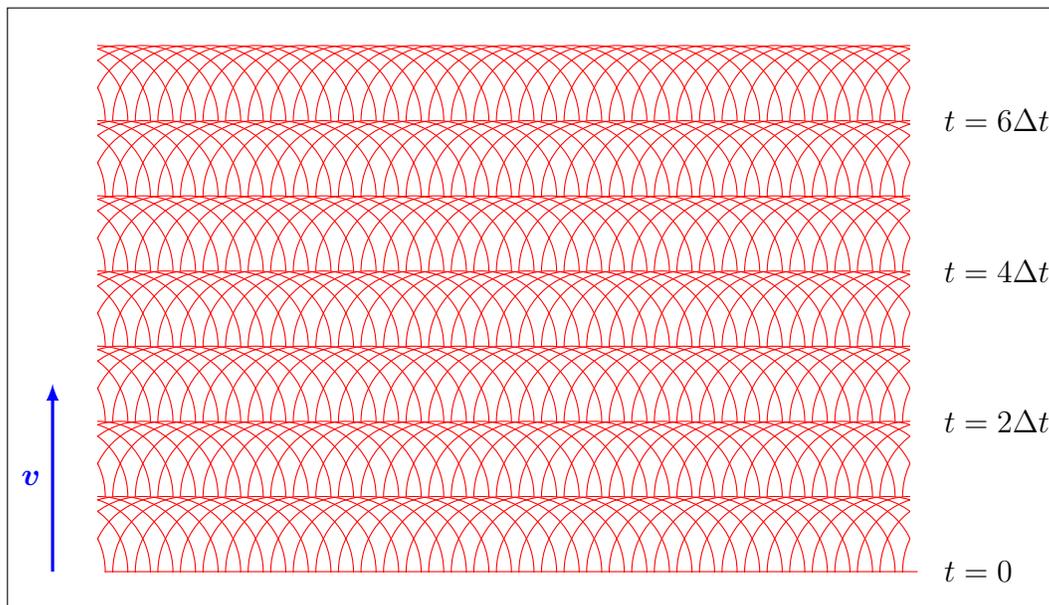


Abbildung 7: Huygensches Prinzip bei einer ebenen Wellenfront.

### 3 Theorie der Beugung

#### 3.1 Das Prinzip von Huygens

Jeder Punkt einer bestehenden **Wellenfläche** wird als Zentrum einer neuen kugelförmigen **Elementarwelle** aufgefasst. Die Umhüllende dieser Elementarwellen ergibt dann die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

Eine Wellenfläche wird folgendermassen definiert. Alle Punkte der Wellenfläche genügen der Beziehung:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \varphi, \quad (2)$$

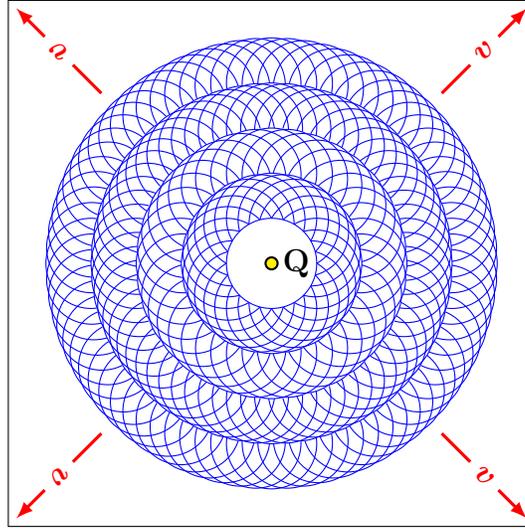
wobei  $\mathbf{k}$  den Wellenzahlvektor ( $|\mathbf{k}| = 1/\lambda$ ),  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\varphi$  eine beliebige, aber fest vorgegebene Phase bedeuten. Abb. 7 und Abb. 8 zeigen diese Elementarwellen für eine ebene bzw. eine Kugelwelle.

#### 3.2 Beugung

Falls sich beim Übertritt einer Welle in ein anderes Medium die Phasengeschwindigkeit  $v = \omega/k$  ändert, ändert sich entsprechend auch der Radius  $\Delta r = v\Delta t$  der sich in der Zeit  $\Delta t$  neu ausbreitenden Kugelwellen.

Das Huygensche Prinzip ist über 300 Jahre alt. Heute wissen wir, dass die Atome der Materie die Quellen darstellen. Im Fall von Licht beispielsweise absorbieren die Photonen, schwingen eine gewisse Zeit als harmonische Oszillatoren und emittieren wieder Licht als Kugelwelle.

Die Phasenbeziehung der einzelnen Punktquellen bewirkt, dass sich die Welle weiterhin in der ursprünglichen Richtung bewegt.

Abbildung 8: Huygenssches Prinzip bei einer Kugelwelle (Quelle  $\mathbf{Q}$ ).

Bei elektromagnetischen Wellen im Vakuum sind die Quellen abwechselnd die elektrischen und magnetischen Felder der Welle.

Es seien  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n$  in einer Reihe angeordnete Quellen kohärenter Kugelwellen gleicher Amplitude  $a$  und im Abstand  $\delta$  voneinander (siehe Abb. 9).

Die Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  zweier benachbarter Quellen in Richtung  $\alpha$  ist gleich

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = k\delta \sin \alpha \quad \text{für } \delta \ll r \quad (3)$$

Ferner sei auch

$$d \equiv (N - 1)\delta \ll r, \quad (4)$$

wobei  $r$  der Abstand des Punktes  $\mathbf{P}$  vom Mittelpunkt der Anordnung ist, an dem die Interferenz aller von den  $N$  Quellen ausgehenden Kugelwellen berechnet werden soll (siehe Abb. 10).

Die Überlagerung dieser Wellen im Punkt  $\mathbf{P}$  ergibt die Amplitude:

$$\xi(\alpha) = \sum_{n=1}^N \frac{a}{r} e^{i(kr_n - \omega t)} \quad (5)$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit wählen wir  $N$  ungerade, also  $N = 2M + 1$ . Damit gilt

$$r_n = r + (M + 1 - n) \cdot \Delta s \quad (6)$$

$$\Rightarrow kr_n = kr + (M + 1)\Delta\varphi - n\Delta\varphi \quad (7)$$

$$\Rightarrow \xi(\alpha) = \frac{a}{r} e^{i(M+1)\Delta\varphi} \left\{ \sum_{n=1}^{2M+1} e^{-in\Delta\varphi} \right\} e^{i(kr - \omega t)} \quad (8)$$

Die Summe der Exponentialfunktionen können wir umformen, da sie eine endliche geometrische Reihe in  $x = e^{-i\Delta\varphi}$  darstellt.

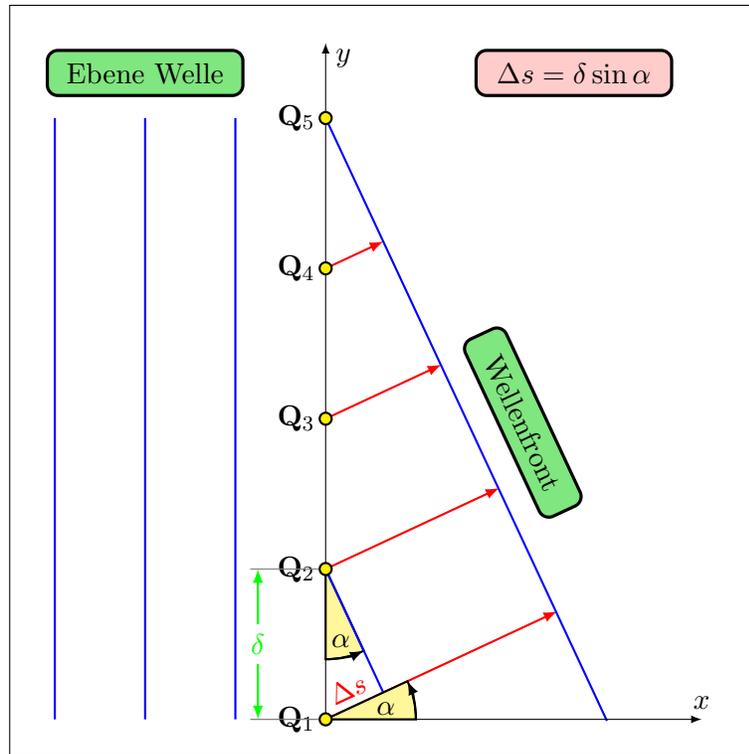


Abbildung 9: Überlagerung der von  $N$  Quellen auslaufenden Kugelwellen in Richtung des Winkels  $\alpha$ .

Aus der Identität

$$x + x^2 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - x}{x - 1} \quad (9)$$

folgt nämlich

$$\sum_{n=1}^{2M+1} e^{-in\Delta\varphi} = \frac{e^{-i\Delta\varphi(2M+2)} - e^{-i\Delta\varphi}}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \quad (10)$$

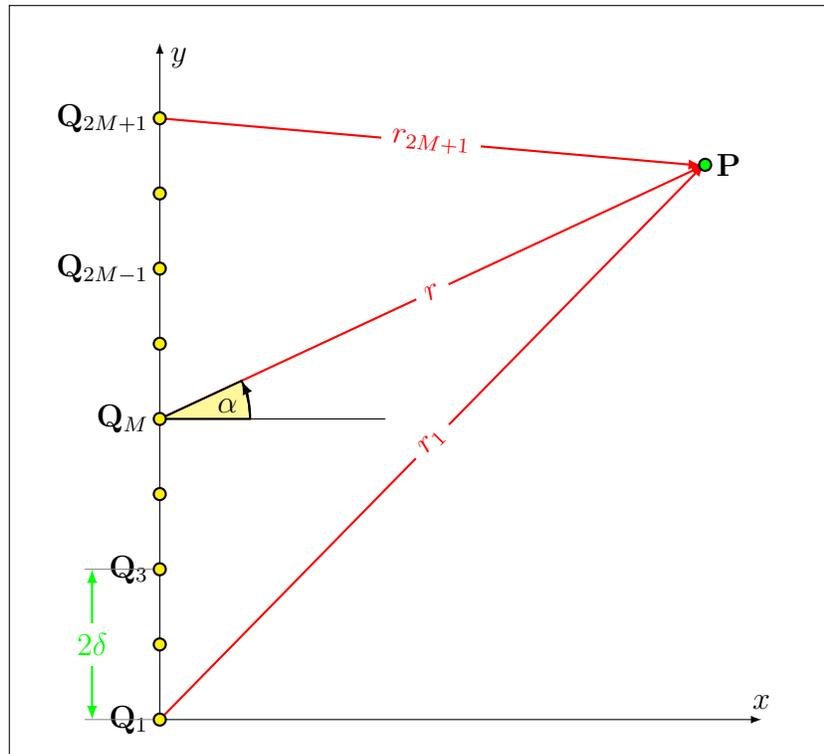
$$= e^{i\Delta\varphi/2} \cdot e^{-i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{e^{-i\Delta\varphi(M+1)} - e^{i\Delta\varphi M}}{e^{-i\Delta\varphi/2} - e^{i\Delta\varphi/2}} \quad (11)$$

$$= e^{-i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{e^{-iN\Delta\varphi/2} - e^{iN\Delta\varphi/2}}{e^{-i\Delta\varphi/2} - e^{i\Delta\varphi/2}} \quad (12)$$

$$= e^{-i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{\sin N\Delta\varphi/2}{\sin \Delta\varphi/2} \quad (13)$$

Damit ergibt sich für die Amplitude:

$$\xi(\alpha) = \frac{a}{r} \cdot \frac{\sin N\Delta\varphi/2}{\sin \Delta\varphi/2} e^{i(kr - \omega t)} \quad (14)$$

Abbildung 10: Zur Berechnung der Interferenz im Punkte **P**.

und für die Intensität

$$\langle I \rangle = \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\sin^2 N \Delta\varphi/2}{\sin^2 \Delta\varphi/2} \quad (15)$$

Abb. 11 zeigt verschiedene Intensitätsverteilungen. Bei Abb. 11 a) und b) ist die gesamte Breite  $d$  gleich gross, aber die Zahl der Quellen unterscheidet sich um einen Faktor 10. Man beachte den unterschiedlichen Winkelmassstab!

Bei Abb. 11 b) und c) ist dagegen die Zahl  $N$  der Quellen gleich gross, dafür ist der Abstand  $\delta$  und damit die gesamte Breite  $d$  bei c) verdoppelt.

Wir halten fest:

- a) Bei  $\alpha = 0$  liegt ein Maximum der Intensität, welche für grosse  $\alpha$  stark abfällt. Die Breite des Maximums ist proportional zu  $1/N$ .
- b) Für  $\delta > \lambda$  gibt es mehrere Maxima, und zwar für die Winkel

$$\sin \alpha_n = n \frac{\lambda}{\delta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, p < \frac{\delta}{\lambda} \quad (16)$$

Entscheidend ist also das Verhältnis  $\delta/\lambda$ !

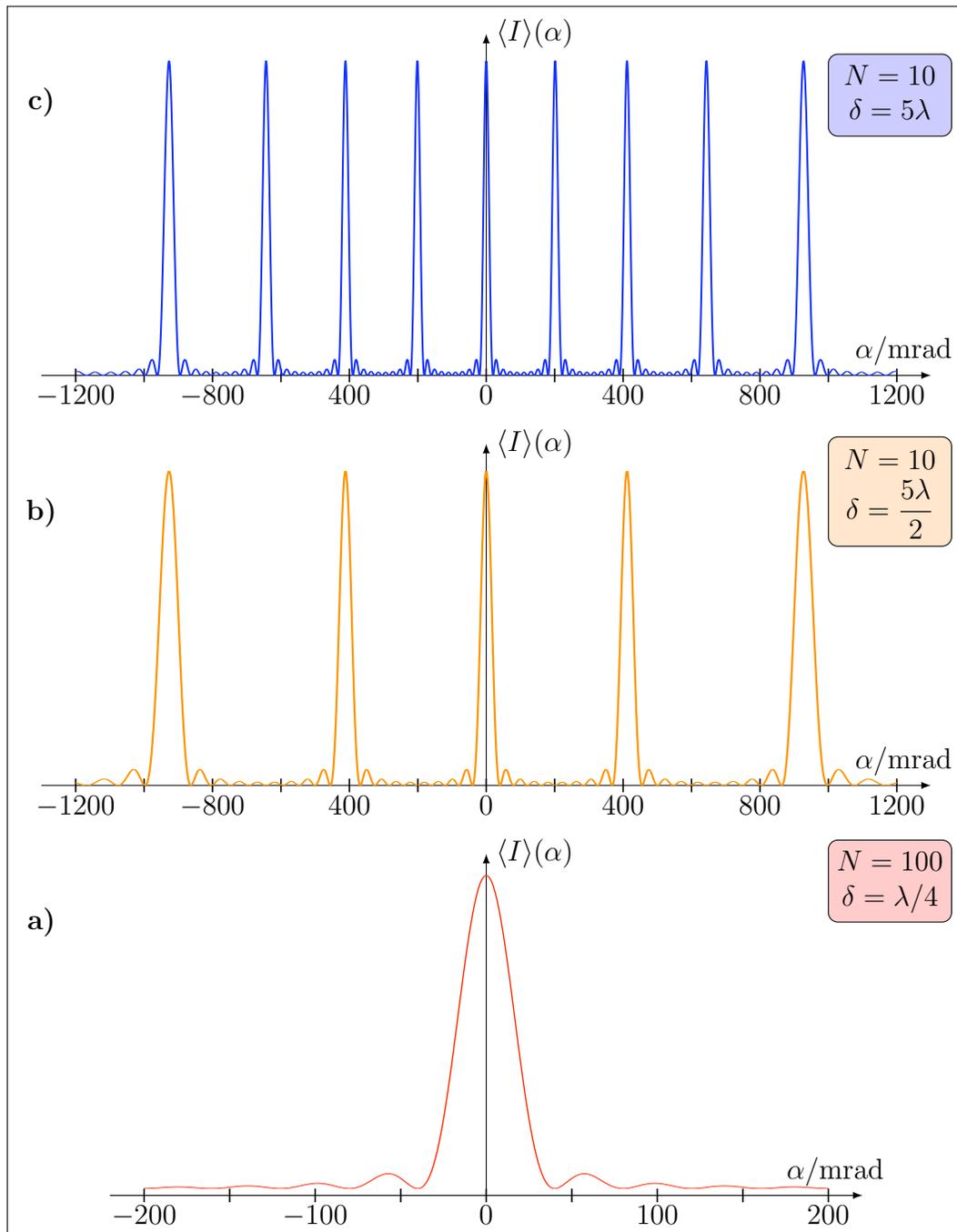


Abbildung 11: Intensität im Punkte  $\mathbf{P}$  als Funktion des Winkels  $\alpha$ . Eine ebene Welle fällt ein, und  $N$  kohärente Quellen im gleichmässigen Abstand  $\delta$  voneinander emittieren Kugelwellen, welche in grossem Abstand  $r$  interferieren.

- c) Man beachte: Es gilt stets:  $r \gg d$ . Deshalb spielt der  $r^{-1}$ -Term der Kugelwelle keine Rolle, da er für alle Punktquellen gleich gross ist. Wenn man nun bei konstantem Abstand  $r$  die Breite  $d$  vergrössert, tragen zunehmend mehr Quellen zur Amplitude am, allerdings mit

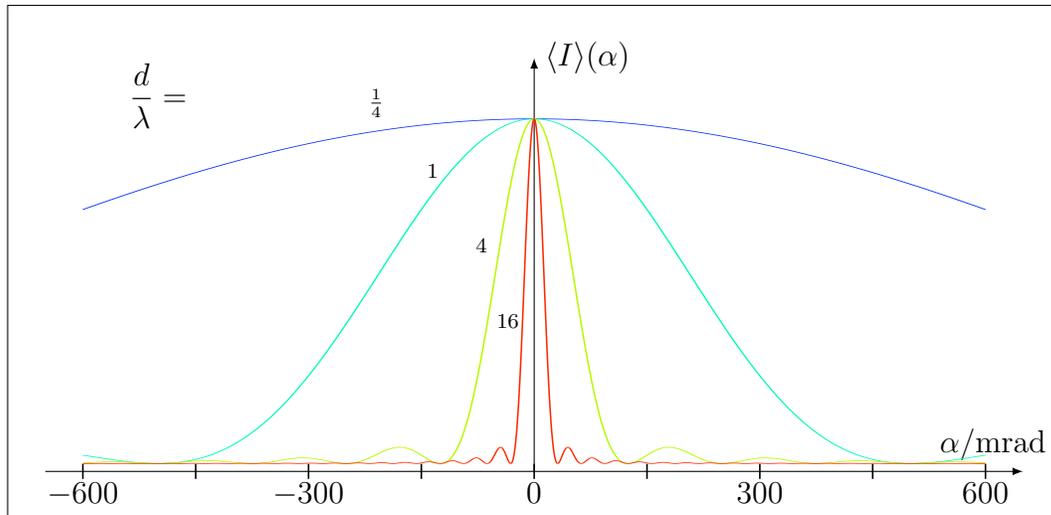


Abbildung 12: Beugung am Spalt.

kleinerer Amplitude wegen des  $r^{-1}$ -Terms der Kugelwelle. Für  $d \rightarrow \infty$  verschwindet die Interferenzerscheinung.

Was geschieht nun, wenn man die Zahl der Quellen gegen unendlich gehen lässt, aber gleichzeitig den Abstand  $\delta$  zwischen ihnen derart verkleinert, dass die Breite  $d$  konstant bleibt? Es sei also

$$N \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \delta \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad N \cdot \delta = d = \text{konst.} \quad (17)$$

$$\text{und} \quad (Na)^2 := A^2 = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad a^2 \rightarrow 0 \quad (18)$$

Wir untersuchen dazu das Ergebnis Gl. (15) und vernachlässigen dabei den Faktor  $1/r^2$ :

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \langle I \rangle = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} a^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} k \overbrace{N\delta}^{=d} \sin \alpha}{\sin^2 \frac{1}{2} k \frac{d}{N} \sin \alpha} \quad (19)$$

$$\approx \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} a^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} kd \sin \alpha}{\frac{1}{4N^2} k^2 d^2 \sin^2 \alpha} \quad (20)$$

$$= (Na)^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi}{(\frac{1}{2} \Delta\varphi)^2} = A^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi}{(\frac{1}{2} \Delta\varphi)^2} \quad (21)$$

wobei wir dieses Mal  $\Delta\varphi$  nicht mehr auf den Abstand  $\delta$ , der ja gegen null geht, sondern auf die Spaltbreite  $d$  beziehen:

$$\Delta\varphi := kd \sin \alpha = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha \quad (22)$$

Wir halten das wichtige Ergebnis gesondert fest:

$$\langle I \rangle = A^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi}{(\frac{1}{2} \Delta\varphi)^2} \quad \text{Beugung am Spalt} \quad (23)$$

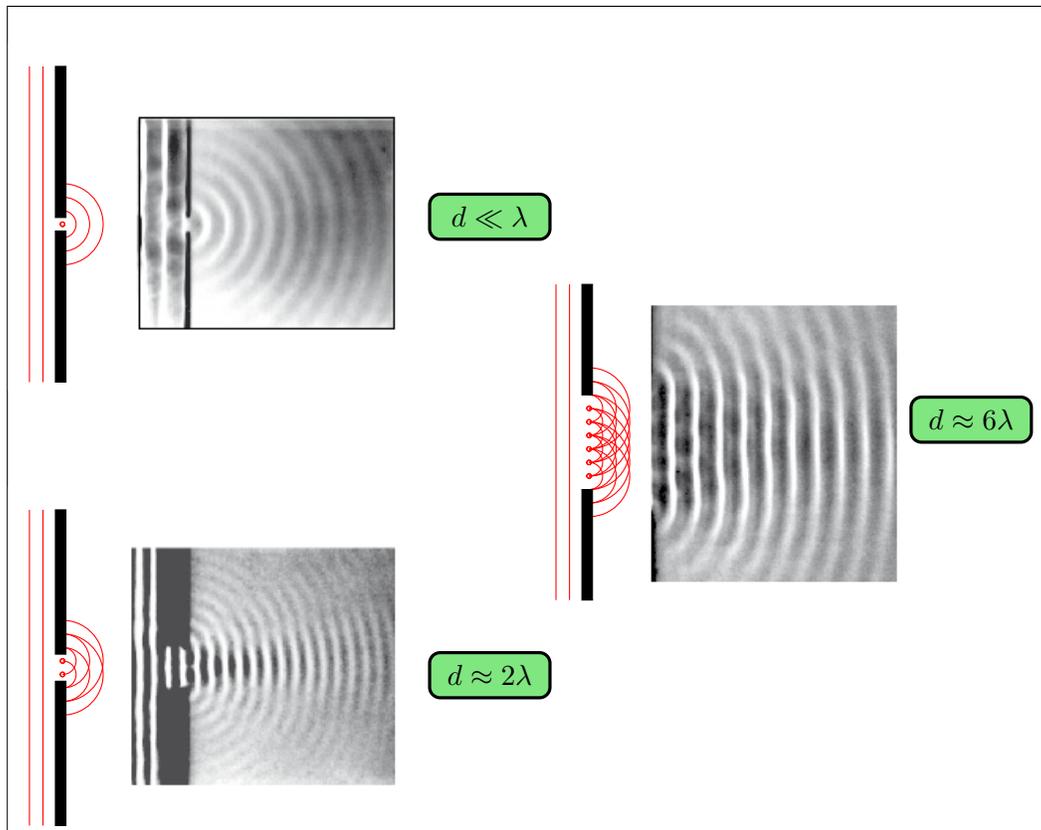


Abbildung 13: Beugung am Einzelspalt.

Wiederum sehen wir, dass die Beugungsfunktion vom Verhältnis  $d/\lambda$  abhängt!

Wir können drei verschiedene Fälle unterscheiden (siehe Abb. 12):

a)  $d < \lambda$ :

Diese Bedingung ergibt ein breites Beugungsmaximum um den Winkel  $\alpha = 0$  herum.

b)  $d \lesssim \lambda$ :

Man erhält ein starkes Maximum bei  $\alpha = 0$ , aber auch weiter Maxima bei grösseren Winkeln. Die Welle wird an der Blende gebeugt! Das ist auch der Grund, weshalb man um die Ecke hören, aber nicht sehen kann! Schallwellen haben eine typische Wellenlänge in der Grössenordnung von  $\lambda = 1$  m (Denken Sie an die Grösse von Musikinstrumenten!); die Wellenlänge von Licht ist dagegen  $\lambda \approx 500$  nm.

c)  $d \gg \lambda$ :

Diese Bedingung ergibt ein scharfes Maximum bei  $\alpha = 0$ , was einem geometrischen Schattenschwurf entspricht. Die in andere Richtungen laufenden Wellen löschen sich gegenseitig vollständig aus.

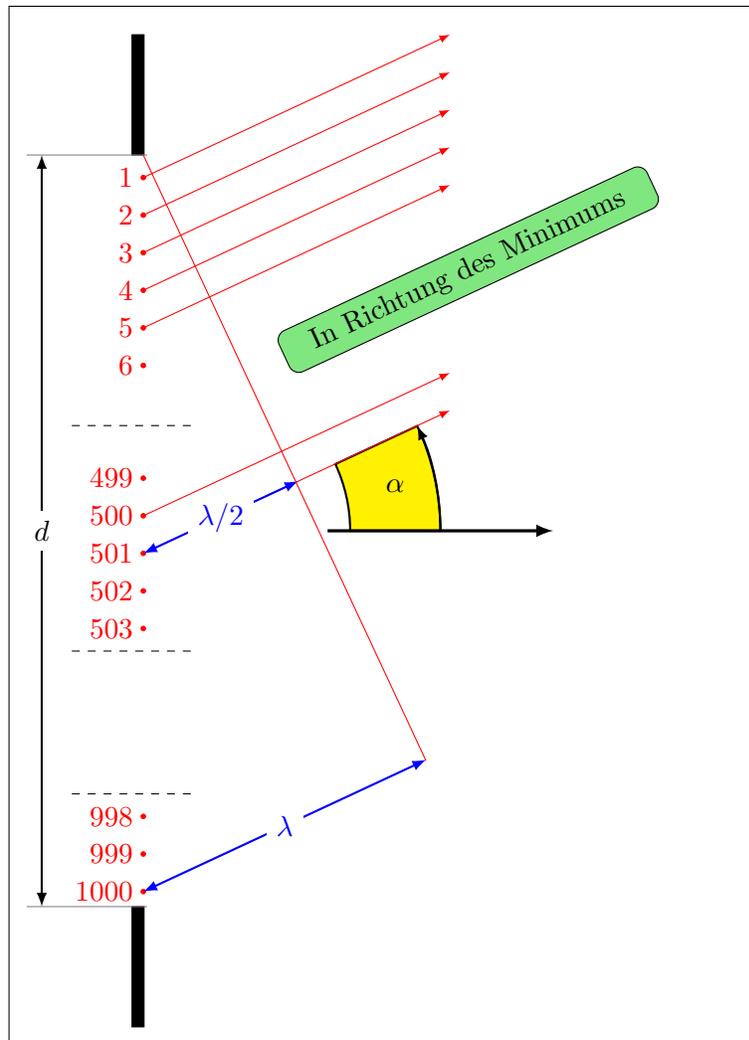


Abbildung 14: Bestimmung des Winkels eines Minimums bei der Beugung durch einen Einzelspalt der Breite  $d$ .

### 3.3 Beugung am Einzelspalt

Wir studieren nun die Beugung an einem Einzelspalt als Funktion der Breite des Spalts (Siehe Abb. 13):

- a) Wenn die Breite  $d$  viel kleiner ist als die Wellenlänge  $\lambda$  ( $d \ll \lambda$ ), können wir den Spalt als einzelne Quelle von Elementarwellen betrachten.
- b) Wenn die Breite  $d$  viel grösser als die Wellenlänge  $\lambda$  ist ( $d \gg \lambda$ ), können wir jeden Punkt des Spalts als Quelle von Elementarwellen betrachten.

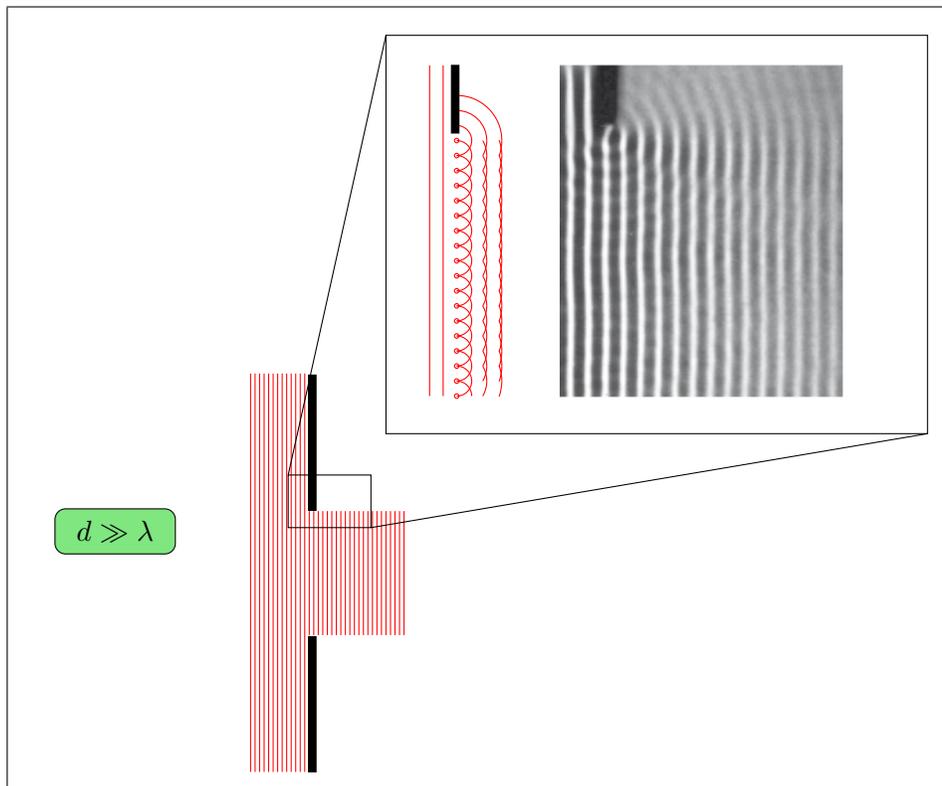


Abbildung 15: Beugungsmuster, wenn die Breite viel grösser als die Wellenlänge ist. Der Beugungseffekt verschwindet und ist nur an den Rändern des Spalts sichtbar.

### 3.4 Position des ersten Minimums

Wir bestimmen die Position des ersten Minimums. Wir können den Spalt in kleine Teile unterteilen, die als Quelle für eine Elementarwelle wirken. Wir können z.B. 1000 Teile betrachten. Siehe Abb. 14.

Wir betrachten die Quelle #1 oben am Spalt und die Quelle #501 in der Mitte des Spalts. Wenn der Gangunterschied zwischen diesen Quellen *gleich einer halben Wellenlänge ist, werden sich die Wellen auslöschen.*

Entsprechend gilt dies auch für die Quelle #2 und die Quelle #502. Sie werden sich auslöschen. Und so weiter mit den Quellen #3, #4, ... bis #499. Aus der Abb. 14 erhalten wir die gesamte Bedingung für das erste Minimum:

$$\frac{d}{2} \sin \alpha = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d \sin \alpha = \lambda \quad \text{Erstes Minimum} \quad (24)$$

Wir bemerken, dass für

$$d \ll \lambda \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\lambda}{d} \rightarrow \infty \quad \text{Kein Minimum} \quad (25)$$

Siehe Abb. 13. Die Welle ist kugelförmig.

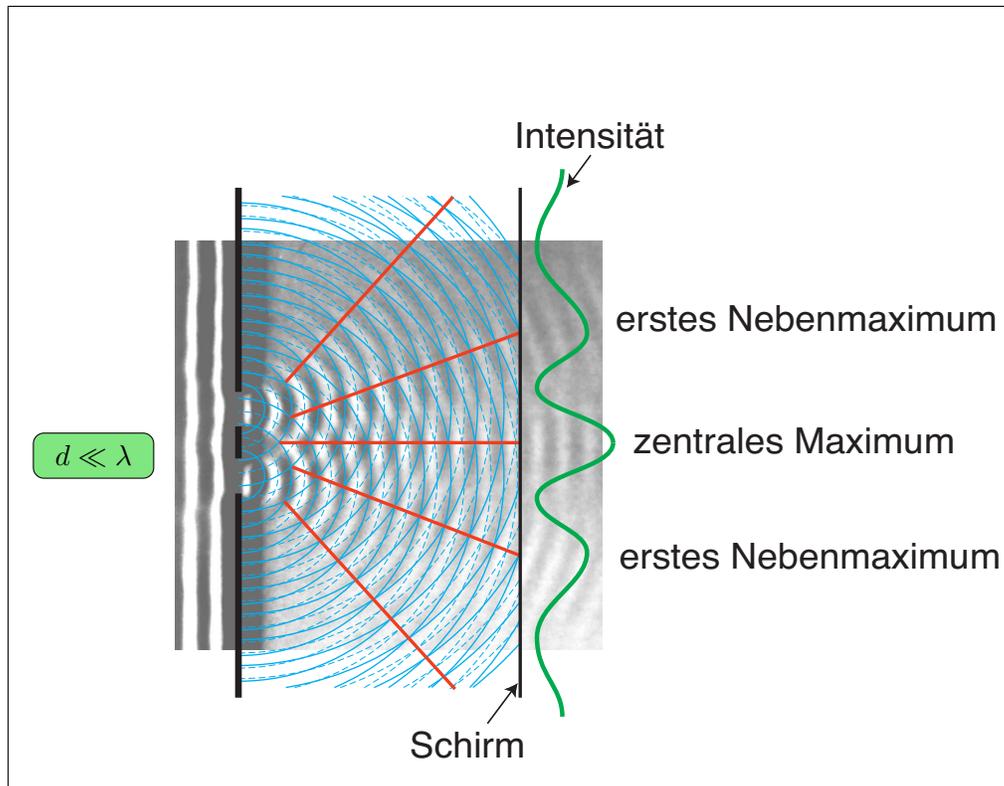


Abbildung 16: Die Amplitude der Wasserwellen für die Beugung am Doppelspalt. Beim Schirm wird die Amplitude der Wasserwellen gemessen.

Wenn die Breite viel grösser als die Wellenlänge ist, verschwindet der Beugungseffekt und ist nur an den Rändern des Spalts sichtbar:

$$d \gg \lambda \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\lambda}{d} \rightarrow 0 \quad \text{Die Beugung verschwindet.} \quad (26)$$

Siehe Abb. 15.

### 3.5 Beugung am Doppelspalt

Wir studieren die Beugung am Doppelspalt. Wir nehmen an, dass die Breite der Spalte viel kleiner als die Wellenlänge ist:

$$d \ll \lambda \quad (27)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, können wir beide Löcher als Quellen einzelner Elementarwellen, die sich als Kugelwellen ausbreiten, betrachten. Die resultierende Welle ist in jedem Punkt gleich der Summe der beiden Wellen.

Wenn wir in den Bereich, wo die Wellen interferieren, einen flachen „Schirm“ einfügen, so erwarten wir, dass es Stellen mit **Minima und Maxima** der Amplitude gibt. Siehe Abb. 16.

Wir bestimmen die Position des ersten Maximums. Wir nehmen an, dass der Abstand  $r$  zum Schirm viel grösser als der Abstand  $D$  zwischen den Spalten ist. Siehe Abb. 17.

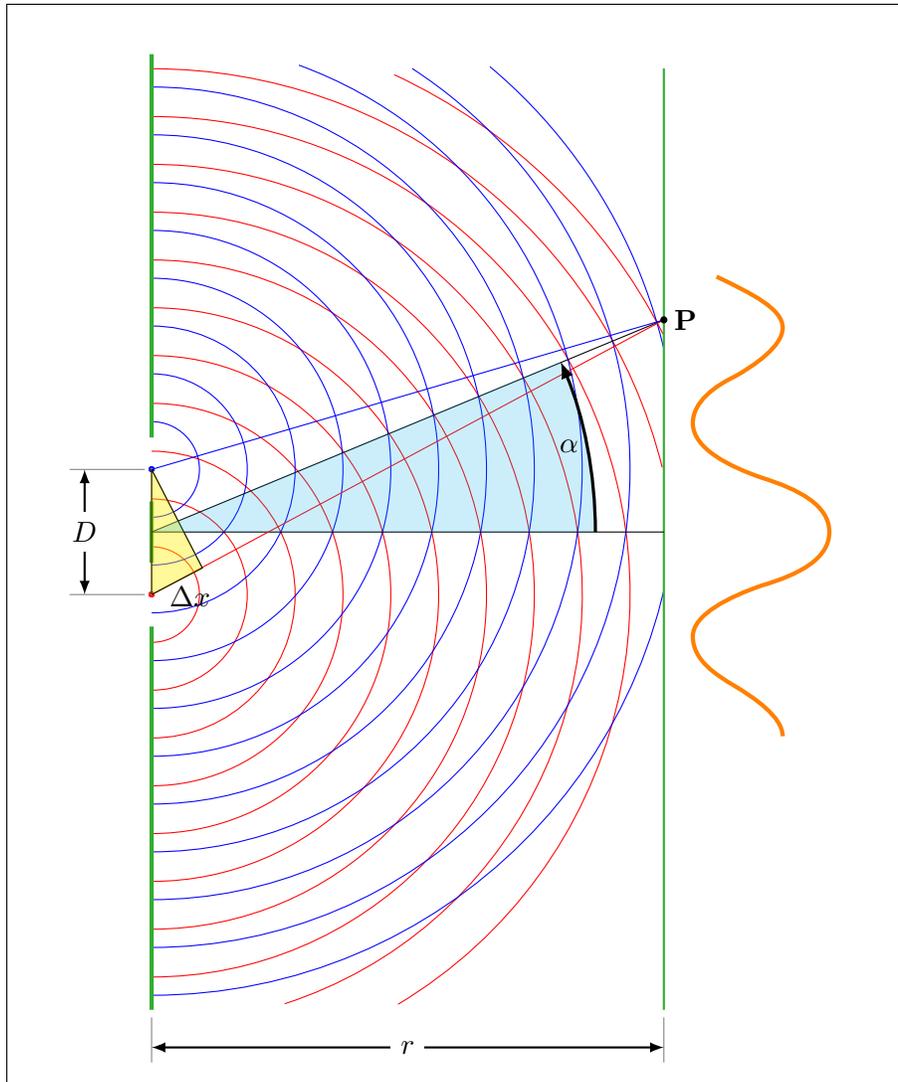


Abbildung 17: Bestimmung des Winkels des ersten Maximums.

Wir betrachten den Punkt **P** auf dem Schirm. Um eine konstruktive Interferenz in diesem Punkt zu beobachten, muss für den Gangunterschied  $\Delta x$  gelten:

$$\frac{1}{2}k\Delta x = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

In diesem Fall sind die beiden Wellen genau dann in Phase, wenn der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge beträgt:

$$\Delta x = \frac{2\pi n}{k} = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

Damit im Punkt  $\mathbf{P}$  ein Maximum der Intensität entsteht, muss gelten:

$$\Delta x = D \sin \alpha = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Maxima}), \quad (30)$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen dem Gang und der Normalen auf den Schirm ist.

Für ein Minimum in  $\mathbf{P}$  muss der Gangunterschied ein halbzahliges Vielfaches der Wellenlänge betragen:

$$\Delta x = D \sin \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Minima}), \quad (31)$$

Diese Gleichungen gelten für  $d \ll D$ , was für den Vorlesungsversuch nicht ganz zutrifft, da

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{5}. \quad (32)$$

Dies führt zu einer Überlagerung der beiden Beugungsphänomene.