3.1.2 Zentrifuge mit Kugeln

******

1 Motivation

Die Rotation eines mit Wasser gefüllten Rohres bewirkt einen Zentrifugaldruck. Dabei gleitet eine Steinkugel nach aussen, ein Pingpongball dagegen nach innen.

2 Experiment

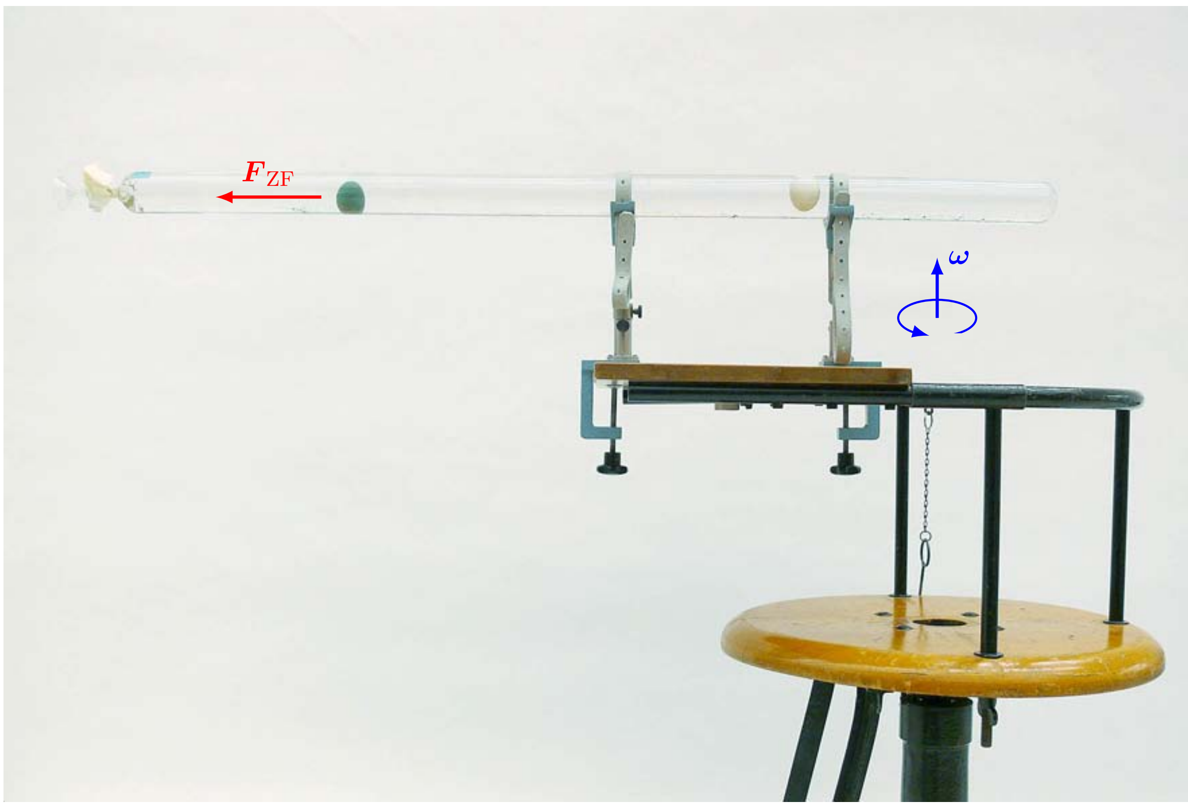

Abbildung 1: Versuchsaufbau „Zentrifuge mit Kugeln“

Ein mit Wasser gefülltes Glasrohr befindet sich auf einem Drehschemel (siehe Abb. 1). Wird nun der Drehschemel in Rotation versetzt, wandert eine im Rohr befindliche Steinkugel nach aussen, eine Pingpongball dagegen nach innen (siehe Abb. 2).

Bei der Rotation entsteht im Wasser ein Zentrifugaldruck $p(r)$. Auf das Flüssigkeitselement im Abstand r'

$$\mathrm{d}m = \rho_{\mathrm{W}} A \, \mathrm{d}r' \tag{1}$$

wirkt die Zentrifugalkraft

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{ZF}} = \omega^2 r' \, \mathrm{d}m \,, \tag{2}$$

wobei ρ_{W} die Dichte des Wassers, A die Querschnittsfläche und ω die Winkelgeschwindigkeit bedeuten (siehe Abb. 3).

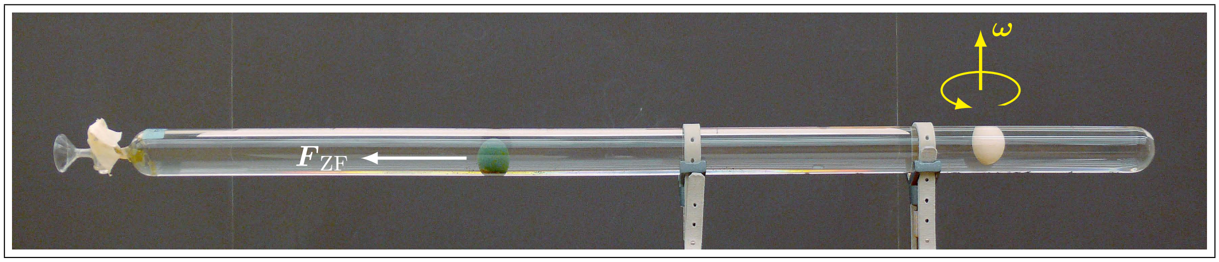

Abbildung 2: Das wassergefüllte Rohr rotiert. Dabei gleitet die Steinkugel nach aussen, der Pingpongball dagegen nach innen.

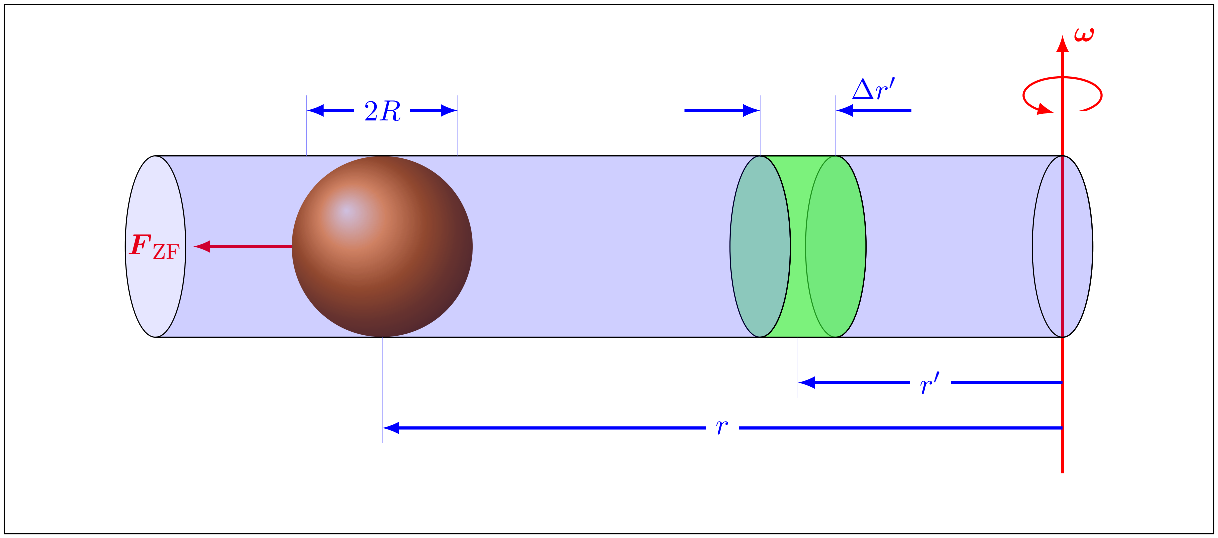

Abbildung 3: Zentrifugaldruck in einem rotierenden und mit Wasser gefülltem Rohr..

Der Wasserdruck $p(r)$ im Abstand r von der Drehachse ist dann gegeben durch:

$$p(r) = \frac{1}{A}\int_0^r \mathrm{d}F_{\mathrm{ZF}} = \frac{A\omega^2\rho_{\mathrm{W}}}{A}\int_0^r r'\,\mathrm{d}r' = \tfrac{1}{2}\omega^2\rho_{\mathrm{W}}\,r^2 \tag{3}$$

Der Druck wächst also *quadratisch* mit dem Abstand von der Drehachse!

Wir berechnen im Folgenden die durch den Wasserdruck auf die Kugel (Radius R) im Abstand r von der Drehachse ausgeübte Kraft. Wir nutzen dazu die Rotationssymmetrie des Systems aus und betrachten dazu einen Schnitt durch die Rohrachse (siehe Abb. 4).

Die Fläche $\mathrm{d}A$ des Kreisrings mit Polarwinkel ϑ und Breite $\mathrm{d}\vartheta$ beträgt

$$\mathrm{d}A = 2\pi R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \tag{4}$$

Zur hydrostatischen Kraft trägt nur die Komponente $\mathrm{d}A_{\|}$ in Richtung der Rohrachse bei:

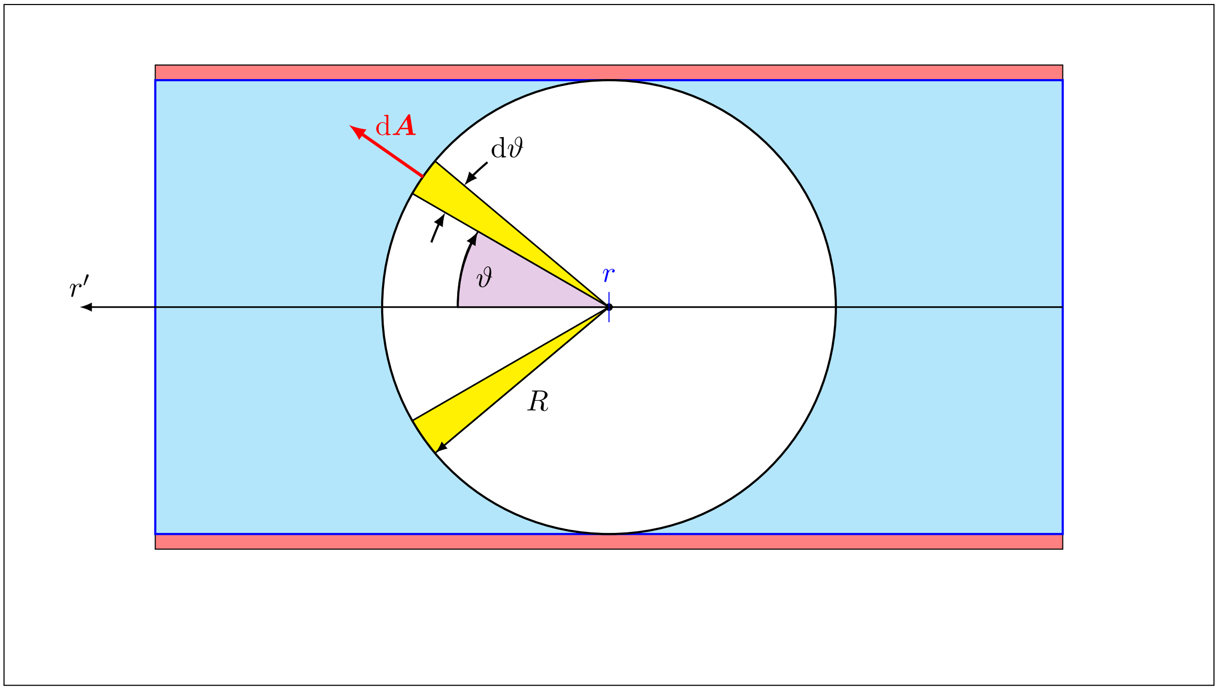

Abbildung 4: Zur Berechnung der hydrostatischen Kraft auf die Kugel

$$\mathrm{d}A_{\|} = \cos\vartheta\,\mathrm{d}A = 2\pi R^2\,\mathrm{d}\vartheta \tag{5}$$

Der Druck hängt ebenfalls vom Polarwinkel ϑ ab:

$$p(\vartheta) = \tfrac{1}{2}\omega^2\rho_{\mathrm{W}}\,\{r + R\cos\vartheta\}^2 \tag{6}$$

Damit lässt sich die Kraft berechnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= -p(\vartheta)\cdot\mathrm{d}A_{\|} && (7)\\ &= -\pi\omega^2R^2\rho_{\mathrm{W}}\sin\vartheta\cos\vartheta\{r + R\cos\vartheta\}^2\,\mathrm{d}\vartheta && (8)\\ \Rightarrow\quad F &= -\pi\omega^2R^2\rho_{\mathrm{W}}\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta\{r + R\cos\vartheta\}^2\,\mathrm{d}\vartheta && (9)\\ &= -\pi\omega^2R^2\rho_{\mathrm{W}}\cdot\left[-\frac{2}{3}rR\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} && (10)\\ &= -\left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho_{\mathrm{W}}\right)r\omega^2 && (11)\\ &= -m_{\mathrm{W}}\,r\omega^2 && (12) \end{aligned}$$

Dabei ist m_{W} die Masse des durch die Kugel verdrängten Wassers! Auf die Kugel mit Dichte ρ_{K} wirkt ausserdem die Zentrifugalkraft

$$F_{\mathrm{ZF}} = m_{\mathrm{K}}\,r\omega^2 \tag{13}$$

Die gesamte auf die Kugel wirkende Kraft ist gleich

$$\boxed{F_{\mathrm{tot}} = F + F_{\mathrm{ZF}} = (m_{\mathrm{K}} - m_{\mathrm{W}})\, r\omega^2} \tag{14}$$

Für $\rho_{\mathrm{K}} > \rho_{\mathrm{W}}$ wirkt die Kraft nach aussen (Steinkugel), für $\rho_{\mathrm{K}} < \rho_{\mathrm{W}}$ dagegen nach innen (Pingpongball)!